位相ノート
Notes on Topology

平場　誠示

目次

位相 (topology) は簡単に言うと、「近い遠いを判断するための部分集合の集まり」という概念で、「距離」が決まっていれば、それから一意的に決まって しまうが、原始時代のように（と大昔まで遡らなくても、戦国時代ぐらいでも良いのだが）統一された距離が決まってなければ、体に触れればかなり近い、手を伸ばして届くなら近い、足を伸ばして届くならそこそこ近いというように、自分の近傍を定義すれば、近い遠いの判断ができる。そのような部分集合の全体を考えたものが位相だと言える。（ちなみに戦国時代は、殿様の手の長さ等を元に、長さを決めていたということなので、国ごとに長さの単位が異なり、距離が決まっていたとは言えないが、位相は、国ごとに定義が出来て、違っていても、それらを合わせた全体で定義できるので、より一般的な概念だと言える。）

参考書として, 次を挙げておく:

・松本和夫著「集合・位相入門」(岩波書店),

・竹之内脩 著「入門集合と位相」実教出版

・梅垣, 大矢, 垣原 共著「集合・位相。距離」（共立出版）

1 位相空間 (topological spaces=top.sp's)

1.1 位相 topology=top.

$X \neq \emptyset$: 集合, 2^X: 全部分集合族として, ある部分集合族 $\mathcal{O} \subset 2^X$ が**位相** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

(1) $X, \emptyset \in \mathcal{O}$. (2) $U, V \in \mathcal{O} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{O}$. (3) $U_\lambda \in \mathcal{O}(\lambda \in \Lambda) \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}$.

この位相の元 $U \in \mathcal{O}$ を **開集合 open set** と呼ぶ. つまり, 位相は開集合の全体で, 次を満たす:

(1) 全体集合と空が開 (2) 有限個の共通部分も開 (3) 和については, どんなに沢山あっても開.

この最後のパラメータで, $\lambda \in \Lambda$ とギリシャ文字を使うのは, その個数が, 有限でも無限でも良いのだが, 可算無限どころか, 連続無限, あるいはもっと多くの数があっても良いという意味合いがある. (いくらでも濃度の大きい集合は作れるので.) ちなみに可算無限なら, n や i, j, k, ℓ, m 等を用いて, 連続無限なら t や s, p, q 等を使うことが多い. それよりもっと多くても良いというときに, $\alpha \in A$ や $\lambda \in \Lambda$ 等のギリシャ文字を用いることが多い.

全体集合と位相の組 $(X, \mathcal{O})$ を, **位相空間 topological sp.** と呼ぶ. 特に X の位相ということを強調したいときは, $\mathcal{O} = \mathcal{O}_X$ と表す.

また, 補集合が開集合のとき, **閉集合 closed set** という. $F \in \mathcal{C} = \mathcal{O}^c \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} F^c \in \mathcal{O}$.

ここで, 開集合族の補集合 $\mathcal{O}^c$ という書き方は, ラフな使い方で, 元が集合なので, その各元の補集合全体という意味である. 正式な方の $2^X \setminus \mathcal{O}$ という意味ではないことに注意. ここでは, 集合族に対する集合演算は元である集合に対して, 施すものとする. 補集合, 閉包, 和, 共通部分など.

上の定義から, 明らかに, 全体集合 X と空集合 $\emptyset$ は, 開かつ閉となる.

x 全体集合と空集合だけ $\{X, \emptyset\}$: **密着位相 indiscrete top.**, **自明な位相 trivial top.** で, 任意の 2 点の距離が 0 で, 区別しない（できない）位相と言える. このとき, 空でないどんな部分集合も連結となる.

また, 全部分集合族 2^X: **離散位相 discrete top.** で, 自分との距離は 0 だが, 他との距離は 1 (0 以外なら ∞ でも良い.) で決まる位相で, これは全ての部分集合が開かつ閉となり, 1 点集合以外は, 不連結である.

しかし, 位相とは近さ遠さを調べるための抽象概念であるから, これらのどちらも, 両極端で, 殆ど役には立たない！！従って, 目的に応じて適切な位相を入れることが重要となる.

後でも述べるが, n 次元実ベクトル空間 $\mathbf{R}^n$ には, 元 $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ に対し, 普通, その大きさ $|x| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$ から決まる距離 $d(x, y) = |x - y|$ を入れ, (このとき, n **次元ユークリッド空間** と呼ぶ.) その距離を用いて, 開集合が定義されるが, その開集合全体は明らかに, 位相の定義を満たす. (**ユークリッド位相**と呼ぶ.) 従って, 普通, ユークリッド空間には, この位相が入っているものとする.

位相空間の部分集合に対し, その部分集合に制限して位相を入れた時 (つまり, その部分集合との共通部分を位相として入れる), **相対位相 relative top.** と呼ぶ. つまり, $A \subset X$ に対し, $\mathcal{O}_A = \mathcal{O}_X \cap A$ として A の (X からの) 相対位相を定義.

これは, ある程度慣れないと, 分りにくい面があるが, 要は, 相対位相=制限位相で, 制限=共通部分 だと思えば良い. 例えば, 1 次元ユークリッド空間の半開区間 $(a, b]$ に相対位相を入れると, $(a, b]$ 自身が全体集合なので, 開かつ閉で, その中の半開区間は, 位置に応じて, 閉集合になったり, どちらでも無かったり, 開集合になったりする.

1.2 距離空間 metric sp's.

距離 metric $d(x, y)$ とは, 集合 x の任意の 2 点 $x, y \in X$ に対し, 無限大を含む非負の値を対応させる写像で, (1) 非負性, 零値同一性 (2) 対称性 (3) 三角不等式を満たすときを言う.

即ち, $d : X \times X \to [0, \infty]$: 写像 s.t. ${}^\forall x, y, z \in X$,

(1) $d(x, y) \geq 0, = 0 \iff x = y$ (2) $d(x, y) = d(y, x)$ (3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

$d = d_X$ とも表す. このとき, $(X, d) = (X, d_X)$ を**距離空間**と呼ぶ.

$\mathbf{R}^n$ に 2 点の差の絶対値 (大きさ) $d(x, y) = |x - y|$ ($|x| = |(x_1, \ldots, x_n)| := (x_1^2 + \cdots + xn^2)^{1/2}$) で距離となり, この距離の元で, $\mathbf{R}^n$ を n **次元ユークリッド 空間 Euclidean sp.** と呼ぶ.

距離空間において, ある点 x を中心として, 距離 $\delta > 0$ 未満の点全体 (中心 x, 半径 δ の開円盤・開球) を, $U_\delta(x)$

と表わし, x **の δ-近傍 neighborhood** という. ($U(x;\delta), B(x;\delta), B_\delta(x)$ 等と表すことも多い).

距離空間における開集合 open set $U \subset X$ とは, その集合の任意の点に対し, 中に含まれるような近傍が存在する. 即ち, U: open $\overset{\text{def}}{\iff} {}^\forall x \in U, {}^\exists \delta > 0; U_\delta(x) \subset U$.

これは, 境界のどんなに近くの点であっても成り立つので, 境界点を含んでいないことを表す.

ちなみに, ある部分集合 $A \subset X$ に対し, 点 $x \in X$ が,

境界点とは, どんな近傍をとっても, その集合の点と, 外=補集合の点を含むとき;

x: a boundary point=pt of $A \overset{\text{def}}{\iff} {}^\forall \varepsilon > 0, U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset, U_\varepsilon(x) \cap A^c \neq \emptyset$.

内点とは, 中に含まれる近傍が存在するとき;

x: inner pt of $A \overset{\text{def}}{\iff} {}^\exists \delta > 0; U_\delta(x) \subset A$.

外点とは, 外=補集合に含まれる近傍が存在するときをいう.

x: outer pt of $A \overset{\text{def}}{\iff} {}^\exists \delta > 0; U_\delta(x) \subset A^c$.

境界点の全体を **境界 boundary** ∂A, 内点の全体を **内部 interior** A^o, 外点の全体を **外部 exterior** $(\overline{A})^c$.

上の開集合の定義は, 集合が内点のみで構成されている, つまり境界点を全く含んでいないことを言っている. また, **閉包 closure** $\overline{A} = A \cup \partial A$.

距離空間での閉集合 closed set $C \subset X$ とは, 境界を含むときをいう. $\partial C \subset C \iff C = \overline{C}$.

このとき, 補集合は外点のみとなり, 明らかに, 開集合となるので, 補集合が開集合という位相での定義と同値になる. また開集合の全体は, 位相の定義を満たし, 距離空間では, 距離に応じた位相が 1 つ決まるので位相空間でもある.

1.3 近傍系 system of neighborhoods, 位相基 (底) topological basis = 開基 open basis

位相空間においても, 距離空間の時のように, 近傍を定義し, 逆にそれらを用いて, 開集合, つまり, 位相を定義することができる. $(X, \mathcal{O} = \mathcal{O}_X)$ を位相空間とする.

任意の点を固定し, その点を含む部分集合がその点の**近傍 neighborhood=nbd** であるとは, 点と集合の間に開集合がある, 即ち, 点がその集合の内点であると定義; ${}^\forall x \in X$ fix. $V \subset X$ a nbd of $x \overset{\text{def}}{\iff} {}^\exists U \in \mathcal{O}; x \in U \subset V$.
またその全体を, **点 x の近傍系** $\mathcal{N}(x)$ と表す. 近傍が開集合なら, **開近傍**, 閉集合なら, **閉近傍**という.
$\mathcal{N}_\mathcal{O}(x) := \mathcal{N}(x) \cap \mathcal{O}, \mathcal{N}_\mathcal{C}(x) := \mathcal{N}(x) \cap \mathcal{C}$. **注)** 本質的には, 開近傍のみで十分で, 「近傍 = 開近傍」と思っても殆ど問題ないが, 閉近傍を用いることもある. また, 定義から, 開でも閉でもない近傍も存在する.

・明らかに, **「閉近傍系は, 開近傍の閉包の全体」**である, i.e., $\mathcal{N}_\mathcal{C}(x) = \overline{\mathcal{N}_\mathcal{O}(x)} = \{\overline{U}; U \in \mathcal{N}_\mathcal{O}(x)\}$. 但し, 位相空間での閉包 closure は, 境界を加えたもので, 境界 (点) は, 距離空間と同じように任意の開近傍が集合の点と補集合の点の両方を含むと定義.

固定した点を含む任意の開集合は, その点の開近傍である. これにより, [開集合 $\iff$ その集合の任意の点に対し, その集合がその点の開近傍を含む], i.e., $U \in \mathcal{O} \iff {}^\forall x \in U, {}^\exists V_x \in \mathcal{N}_O(x); x \in V_x \subset U$ となり, 距離空間の時の定義と同じになる. (開近傍を, 近傍, 閉近傍と変えても良い.)

問 上の同値を示せ. ($\Rightarrow$ 明らか. $\Leftarrow$ 各点での開近傍の和が元の集合と同じで, 開集合なので明らか.) ■

位相基 (底) topological basis = 開基 open basis とは, 位相の一部で, それらの色んな和全体が位相と一致するものと定義. 但し, 0 個の和は, 空集合とする. 当然, 位相自体も位相基で, 沢山ある可能性があり, 一意的ではない.

$\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$: top. basis $\overset{\text{def}}{\iff} \{\bigcup \mathcal{U}; \mathcal{U} \subset \mathcal{B}\} \equiv \{\bigcup U_\lambda; \{U_\lambda\} \subset \mathcal{B}\} = \mathcal{O}$.

更に, **准基 (底) quasi-basis** とは, ある位相基の一部で, 任意の有限個の共通部分の全体が位相基 (初めの位相基と同じでも別でも構わない.) となるときをいう. ここでは, 0 個も有限個として, そのときの共通部分は全体集合.
位相基自体も准基なので, こちらも一意的ではない.

$\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{O}$: 准基 $\overset{\text{def}}{\iff} \{\bigcap_{k=1}^n B_k; B_k \in \mathcal{B}_0, k = 1, 2, \ldots, n, n \geq 0\}$ がある位相基となる,
i.e., $\{\bigcup \bigcap_{k=1}^{n_\lambda} B_{\lambda,k}; B_{\lambda,k} \in \mathcal{B}_0, k = 1, 2, \ldots, n_\lambda, n_\lambda \geq 0\} = \mathcal{O}$.

・1 次元ユークリッド空間で, (端点が有理数であるような) 開区間 (a, b) 全体は, 位相基で, (端点が有理数であるような) 半直線 $(-\infty, b), (a, \infty)$ 全体は, 准基となる.

・n 次元ユークリッド空間では, (中心が有理点, 半径が正の有理数の) 開球全体や, (端点が有理数の) 開区間の直積全体は位相基. 准基も 1 次元と同様にして作れる.

これらは後でいう第二可算公理 (可算位相基の存在) を満たす.

基本近傍系=近傍基 neighborhood basis とは, 厳密には, 点を 1 つ止めて, その 「点の基本近傍系, 近傍基」で, その点の近傍系の一部で, 任意の近傍に対し, 点とその近傍の間に入る元 (近傍) を必ず持つものをいう.

$\mathcal{N}_0(x) \subset \mathcal{N}(x)$: 近傍基 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^\forall V \in \mathcal{N}(x), {}^\exists U(x) \in \mathcal{N}_0(x); x \in U(x) \subset V$.

ユークリッド空間で, 各点で, 自然数 n に対し, 半径 1/n の開球 $U_{1/n}(x)$ 全体を考えれば, 近傍基となる.

「第一可算公理 1st axiom of countability」=可算近傍基が存在. 厳密には, 任意の点で, 可算近傍基が存在

「第二可算公理 2nd axiom countability」=可算位相基が存在.

明らかに, 第二可算 $\Rightarrow$ 第一可算.

1.4 連続写像 continuous mapping

位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ から位相空間 $(Y, \mathcal{O}_Y)$ への写像 $f : X \to Y$ が**連続 continuous=conti.** であるとは, 開集合の引き戻しが開集合; 即ち, 行き先の位相の写像による引き戻しが, 元の位相に含まれるときをいう. ${}^\forall V \in \mathcal{O}_Y, f^{-1}(V) \in \mathcal{O}_X$, i.e., $f^{-1}(\mathcal{O}_Y) \subset \mathcal{O}_X$ $\quad (x \in f^{-1}(V) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} f(x) \in V.)$

当然, 同値な定義として, 閉集合の引き戻しが閉集合のとき $f^{-1}(\mathcal{C}_Y) \subset \mathcal{C}_X$ も連続となる.

ちなみに, 集合から集合への **写像 mapping=map.** とは, 写される側の各元に対し, 行き先の元が唯 1 つだけ決まる対応をいう. $f : X \to Y; x \mapsto f(x)$ map. $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^\forall x \in X, {}^{\exists_1} y \in Y; y = f(x)$.

この位相での連続の定義と, 実数値関数が区間で連続の定義を一般化した, 距離空間から距離空間への写像が各点で連続であるという (ε - δ 論法での) 定義は同値である.

$f : (X, d_x) \to (Y, d_Y)$ が連続 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^\forall x \in X, f$ は x で連続 $\Longleftrightarrow$ ${}^\forall x \in X, {}^\forall \varepsilon > 0, {}^\exists \delta > 0; {}^\forall x' \in X; d_X(x, x') < \delta, d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon.$ $\Longleftrightarrow$ ${}^\forall x \in X, {}^\forall \varepsilon > 0, {}^\exists \delta > 0; U_\delta(x) \subset f^{-1}(U_\varepsilon(f(x)))$

(つまり, $f(x)$ の任意の ε-近傍の引き戻しが, x のある δ-近傍を含むことと同値.)

まず, 開集合の引き戻しが開集合なら, $f(x)$ の任意の ε-近傍の引き戻しが開集合なので, ${}^\forall x' \in V := f^{-1}(U_\varepsilon(f(x))), {}^\exists \delta > 0; U_\delta(x') \subset V$ を満たすが, 特に $x' = x$ ととれるので, $U_\delta(x) \subset V$ となり, 上を得る.

逆に, 上を満たすとき, ${}^\forall V \in \mathcal{O}_Y$ に対し, ${}^\forall x \in f^{-1}(V)$ をとる. $f(x) \in V$ で, V: 開より, ${}^\exists \varepsilon > 0; U\varepsilon(f(x)) \subset V$. 上から ${}^\exists \delta > 0; U_\delta(x) \subset f^{-1}(U_\varepsilon(f(x))) \subset f^{-1}(V)$ となり, これは $f^{-1}(V)$ が開に他ならない.

以上により, 距離空間での連続の定義と位相空間での連続の定義は同値となる. ■

・単なる集合から位相空間への写像が与えられたとき, 行き先の位相の引き戻しを, 元の集合の位相と定めれば, この写像は連続となる. この元の集合に与えた位相は, 写像を連続とする最弱位相である.

$f : X \to (Y, \mathcal{O}_Y)$: map. に対し, $\mathcal{O}_X = f^{-1}(\mathcal{O}_Y)$: f を連続にする最弱位相.

上とは逆に, 次を考える:

・位相空間から集合への写像があり, 全体集合の像集合において, 引き戻しが開集合となる部分集合全体を考えれば, 像集合の位相となる. これはこの写像を連続とする像集合の最強位相である.

$f : (X, \mathcal{O}_X) \to Y$: map. に対し, $\mathcal{O}_Y = \{B \subset Y; f^{-1}(B) \in \mathcal{O}_X\}$: f を連続にする最強位相.

位相空間にある同値関係があり, その商集合 (代表元全体の集合) への自然な写像, 各元に代表元を対応させる写像を考えれば, これを連続とする最強位相が, 商集合に入れられる. これを **商位相 quotient top.** と 呼ぶ.

$(X, \mathcal{O}_X)$: top. sp., $\sim$: 同値関係 in X. 商集合 $Y = X/\!\sim \ni [x] \ni y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} x \sim y$ に対し, $f : X \to X/\!\sim; f(x) = [x]$ に対し, 商位相 $\mathcal{O}_{X/\sim} \ni B \subset X/\!\sim \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} f^{-1}(B) \in \mathcal{O}_X$.

ちなみに, **同値関係 equivalence relation** $\sim$ とは, 反射率 reflexive, 対称率 symmetric, 推移率 transitive; $x \sim x$, $x \sim y \Rightarrow y \sim x$, $x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$ を満たすものをいう.

上のように写像を連続にする位相のことを**誘導位相 induced top.** という.

また, 開集合の像が開集合のとき, **開写像 open map.** といい, 閉集合の像が閉集合のとき, **閉写像 closed map.** という. 一般に, 写像の引き戻しは, 集合演算を保つが, 像の方は保つとは限らないことに注意.

同相=位相同型 homeomorphic とは, 全単射な写像が, 連続かつ開写像のときをいう. これは, 写像と逆写像が共に連続と同値.

直積位相 product top. 有限個の位相空間の直積の位相は, 各位相の直積を位相基として定義する. つまり, 各開

集合の直積の色々な和で表される集合全体を直積集合の位相と定める.

$(X_1,\mathcal{O}_1),\dots,(X_n,\mathcal{O}_n)$ に対し, $X=\prod_{k=1}^n X_k$ の直積位相: $\mathcal{O}_X \ni \bigcup_\lambda U_\lambda; U_\lambda \in \prod_{k=1}^n \mathcal{O}_k$.

無限個のとき, 簡単に言えば, 全ての射影を連続にする最弱位相として直積位相を定義する.

より具体的には, 任意の有限個までは, 各位相 (開集合) の直積で, それ以外は全体集合の直積であるようなもの全体を考え, これを位相基とする位相を (即ち, いくつもの和集合全体を) 「直積位相」として定義する.

別の言い方をすれば, 直積位相は, 各射影による位相の逆像全体を准基として定まる位相ともいえる.

各射影による位相の逆像全体の任意の有限個の共通部分は, その有限個の部分だけが, 任意の各位相=開集合で, それ以外は, 全体集合となる. これを位相での**シリンダー集合 cylinder set** という. このシリンダ－集合全体のいくつもの和集合を考え, その全体が直積集合での位相となる.)

$(X_\lambda,\mathcal{O}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$: top. sp. $X=\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ の直積位相 $\mathcal{O}_X$: 射影 projection=proj. $P_\lambda : X \to X_\lambda; (x_\lambda) \mapsto x_\lambda$: に対し, $\{P_\lambda^{-1}U_\lambda, U_\lambda \in \mathcal{O}_\lambda\}$ を准基とする, i.e., $\{\bigcap_{k=1}^n P_{\lambda_k}^{-1}U_{\lambda_k}; U_{\lambda_k} \in \mathcal{O}_{\lambda_k}, k=1,2,\dots,n, n\geq 0\}$: シリンダー集合全体を位相基として, 直積位相を定める. より, 具体的には, (0 の共通部分は全体集合 $X=\prod X_\lambda$)

$\mathcal{O}_X \ni V=\bigcup_{\alpha\in A} V_\alpha; V_\alpha=\bigcap_{k=1}^{n_\alpha} P_{\lambda_{\alpha,k}}^{-1} U_{\lambda_{\alpha,k}}; (U_{\lambda_{\alpha,k}} \in \mathcal{O}_{\lambda_{\alpha,k}}, k=1,\dots,n_\alpha, n_\alpha \geq 0)$.

2 位相構造; コンパクト, 連結, 分離公理

2.1 コンパクト compact=cpt

コンパクト compact=cpt 任意の開被覆に対し, 有限部分被覆が存在するときをいう. **開被覆 open covering=O.C.** とは, 開集合のある集まりで, 対象の集合を覆う, つまり開集合の和がその集合を含むときをいう.

$K\subset X$: cpt $\overset{\text{def}}{\iff} {}^\forall\mathcal{U}\subset\mathcal{O}; K\subset\bigcup\mathcal{U}, {}^\exists U_1,\dots,U_n\in\mathcal{U}; K\subset\bigcup_{k=1}^n U_k$.

ちなみに, 補集合, 対偶の順に考えて, 「開被覆に対し, 有限部分被覆がある」 $\iff$ 「共通元が無い閉集合族に対し, 有限個でも共通元の無い組がある」 $\iff$ 「閉集合族で, 任意の有限個の共通元があれば, 全ての共通元がある」 $\iff$ 「有限交叉性をもつ閉集合族に対し, 必ず共通元がある」(ある集合族が **有限交叉性をもつ**とは, 任意の有限個の共通部分が空でないこととする.)

これより, $K\subset X$: cpt $\iff {}^\forall\mathcal{F}\subset\mathcal{C}; {}^\forall n\geq 1, {}^\forall F_{\lambda_1},\dots,F_{\lambda_n}\in\mathcal{F}, \bigcap_{k=1}^n F_{\lambda_k}\cap K\neq\emptyset, \bigcap\mathcal{F}\cap K\neq\emptyset$

$\iff {}^\forall\mathcal{E}\subset 2^X; {}^\forall n\geq 1, {}^\forall E_{\lambda_1},\dots,E_{\lambda_n}\in\mathcal{E}, \bigcap_{k=1}^n \overline{E_{\lambda_k}}\cap K\neq\emptyset, \bigcap\overline{\mathcal{E}}\cap K\neq\emptyset$. 但し, $\bigcap\overline{\mathcal{E}}=\bigcap\{\overline{E}; E\in\mathcal{E}\}$. .

全体集合が cpt のとき, **cpt(位相) 空間** といい, 部分集合が cpt のとき, **cpt(部分) 集合**といい, 閉包が cpt のとき, **相対 cpt** という.

・位相空間が cpt は次と同値: 任意の有限交叉性をもつ閉集合族に対し, 共通元が必ずある.
更に, 第二可算公理を満たすなら, 点列 cpt と同値 ($\to$ 後証).

・cpt 部分集合 C に含まれる任意の閉集合 $F\subset C$ は, cpt.

閉集合の任意の開被覆に閉集合の補集合を加えれば, cpt 部分集合の開被覆となるので, 有限個で覆えるので, 後は容易.

${}^\forall\mathcal{U}\subset\mathcal{O}$: O.C. of F, $\mathcal{U}\cup\{F^c\}$: O.C. of C. ${}^\exists U_1,\dots,U_n\in\mathcal{U}; C\subset\bigcup U_k\cup F^c$. よって, $F\subset\bigcup U_k$. ■

・Hausdorff 空間の cpt 部分集合 C は閉

cpt 集合の補集合の任意の点に対し, cpt の中の任意の点とを分離するそれぞれの開近傍がとれ, cpt の中の点の開近傍全体は開被覆となるので, 有限個が選べて覆える. これに対応する元の補集合の点での開近傍の有限個の共通部分も開近傍で, これは有限被覆の和とは交わらないので, 補集合に含まれる. よって, 補集合は (各点での cpt と交わりのない開近傍の和で表されるので) 開となり, 元の cpt は閉.

${}^\forall x\in C^c$: 固定. ${}^\forall y\in C, {}^\exists U_y, V_y\in\mathcal{O}; x\in U_y, y\in V_y, U_y\cap V_y=\emptyset$. $\{V_y\}_{y\in C}$: O.C. of C. ${}^\exists y_1,\dots,y_n\in C; C\subset\bigcup V_{y_k}$.
よって, $U:=\bigcap U_{y_k}\in\mathcal{O}$ and $x\in U\subset C^c$. 従って C^c: 開, i.e., C: 閉. ■

・cpt 集合の連続像 (連続写像による像) は cpt.

像の任意の開被覆を考え, その引き戻しを考えれば, 元の cpt 集合の開被覆となるので, 後は明らか. ■

・cpt 位相空間から Hausdorff 空間への連続写像は, 閉写像で, 特に, 全単射なら, 同相写像となる.

上の結果の組合せで分る. 実際, cpt 空間での任意の閉集合は cpt で, その連続像も cpt で, Haus 内なので, 閉. ■

・**Tychonoff チコノフの定理**　任意個の cpt 空間の直積も cpt. 逆も成り立つ.

${}^\forall\lambda\in\Lambda, X_\lambda$: cpt $\iff X=\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$: cpt

($\Leftarrow$) は, 射影 $P_\lambda : X\to X_\lambda; (x_\lambda)\mapsto x_\lambda$ は連続で, $X_\lambda=P_\lambda X$ で, cpt の連続像も cpt なので明らか.

(⇒) について．有限交叉性を持つ X の任意の閉集合族 $\mathcal{F}$ を 1 つ固定し, $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$ を示す．

$$\mathbf{E} = \{\mathcal{E} \supset \mathcal{F},\ \text{有限交叉性をもつ } X \text{ の部分集合族}\}.$$

これは包含関係によって, 帰納的順序集合となる．実際, 全順序部分の元に含まれる部分集合全ての集まり $\mathcal{F}_0 = \mathcal{E}$ が全順序部分での最大元となることが分る (次の問 (1))．(Zorn の補題により, $\mathbf{E}$ は極大元 $\mathcal{E}$ を 1 つはもつ．といえるが, 先の最大元対し, $\bigcap \overline{\mathcal{E}} \neq \emptyset$ を示せば, 十分．なので, Zorn の補題まで用いる必要は無い.) このとき, $\mathcal{E}$ の極大性から, 次が成り立つ:

(1) $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{E} \Rightarrow E_1 \cap \cdots \cap E_n \in \mathcal{E}$. (有限交叉性と極大性から明らか.)

(2) $A \subset X, {}^{\forall}E \in \mathcal{E}, A \cap E \neq \emptyset \Rightarrow A \in \mathcal{E}$. ((1) より, E を有限個の共通部分としてとれるので明らか.)

$\lambda \in \Lambda$ に対し, 先の射影 P_λ で,

$$\overline{\mathcal{E}}_\lambda := \overline{P_\lambda \mathcal{E}} = \{\overline{P_\lambda E}; E \in \mathcal{E}\}$$

とおく．$E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{E}$ に対し, $\bigcap P_\lambda E_k \supset P_\lambda(\bigcap E_k)$ なので, 有限交叉性を持ち, X_λ の cpt 性より, ${}^{\exists}x_\lambda \in \bigcap \overline{\mathcal{E}}_\lambda$．よって, 後は $x := (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \bigcap \overline{\mathcal{E}}$ を示せば, $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ より, $\bigcap \overline{\mathcal{E}} \subset \bigcap \mathcal{F}$ なので, 証明が終わる．(この x の存在は, 選択公理を用いている.) 但し, $\overline{\mathcal{E}} := \{\overline{E}; E \in \mathcal{E}\}$ とする．この証明には, $\mathcal{E}$ の極大性と有限交叉性が必要である．(一般には, 射影の共通元があるからといって, 元の直積空間での共通元があるとは限らない. 次の問 (2))．${}^{\forall}E \in \mathcal{E}$ をとる．x の近傍 $U := \bigcap_{k=1}^n P_{\lambda_k}^{-1}(U_{\lambda_k}) = P_{\lambda_k}^{-1}(\bigcap_{k=1}^n U_{\lambda_k})$ ($U_{\lambda_k} \in \mathcal{N}(x_{\lambda_k})$: x_{λ_k} の近傍) に対し, $U \cap E \neq \emptyset$ となる．実際, $x_\lambda \in \overline{P_\lambda E}$ より, ${}^{\forall}U_\lambda \in \mathcal{N}(x_\lambda), U_\lambda \cap P_\lambda E \neq \emptyset$．よって, $P_\lambda^{-1}(U_\lambda) \cap E \neq \emptyset$ (次の問 (3))．となり, $E \in \mathcal{E}$ 任意で, 性質 (2) より, $P_\lambda^{-1}(U_\lambda) \in \mathcal{E}$ が言える．更に, 性質 (1) から, $U = \bigcap_{k=1}^n P_{\lambda_k}^{-1}(U_{\lambda_k}) \in \mathcal{E}$ も成り立ち, $\mathcal{E}$ の有限交叉性より, $U \cap E \neq \emptyset$．ここで, U の形の近傍全体は, 直積集合 X での 1 つの近傍基なので, $x \in \overline{E}$ を得る．$E \in \mathcal{E}$ の任意性より, 結局, $x \in \bigcap \overline{\mathcal{E}}$.

上で, 初めに有限交叉性をもつ閉集合族を 1 つ固定したが, $\mathbf{E}$ の定義を, 有限交叉性をもつ集合族の全体とおき, その中の各元 $\mathcal{E}$ に対し, 1 つの全順序部分での最大元=極大元を用いれば, 全く同様に, $\bigcap \overline{\mathcal{E}} \neq \emptyset$ が示せる．

問　上の証明で, 次を示せ:

(1) $\mathbf{E}$ の 1 つの全順序部分 $\mathbf{L} \subset \mathbf{E}$ の元の中の部分集合全体 $\mathcal{F}_0 := \bigcup \mathbf{L} = \{E \in \mathcal{E}; \mathcal{E} \in \mathbf{L}\}$ が, $\mathcal{F}_0 \in \mathbf{E}$,　即ち, $\mathcal{F}$ を含み, 有限交叉性をもつ．

(2) $\mathbf{R}^2$ 内の 3 つの集合で, 3 つの共通部分は無いが, 各射影の 3 つの共通部分はある例を作れ．

(→ 底辺が横軸と平行な正三角形の各辺で, 両端点を含むもの．　底辺の中点が, 射影の共通元での座標となる.)

(3) $U_\lambda \cap P_\lambda E \neq \emptyset$. なら, $P_\lambda^{-1}(U_\lambda) \cap E \neq \emptyset$. ■

・ユークリッド空間において, コンパクト=有界閉

まず, 「cpt なら有界」は, 各点で半径 1 の開近傍をとれば, cpt 性より, 有限個で覆えて, どれか 1 つの中心から, 個数の半径の閉球で囲めるので, 有界．また, Hausdorff の中の cpt は「閉」である．　逆は, まず, 有界性から, n 次元閉正方体で囲める．(以下では, 背理法で示すが, その証明は, 閉正方体が cpt であることの証明にもなっている.) もし, ある開被覆があり, その有限個で覆えないとする．閉正方体を 2^n 等分し, そこに含まれる元の集合の部分で, 有限個で覆えないものがどこかにはあるので, 1 つとり, その閉正方体を再び, 2^n 等分する．以下, これを繰り返せば, どこか 1 点に収束する．当然, それは元の有界閉集合の点となるので, その点を含む開被覆の 1 つがある．よって, その点の開近傍で, 開被覆の 1 つである開集合に含まれるものがある．しかし, これは, 収束する閉正方体列の極限点の近傍なので, ある番号から先を全て含むことになり, それらは開被覆の 1 つで覆えたことになってしまう．しかし, 閉正方体列は, (中の元の集合部分が) 有限個で覆えないものを選んでいたので, 矛盾. ■

・cpt 集合上の実数値連続関数は, 最大値・最小値を持つ.

cpt の連続像が cpt で, $\mathbf{R}$ の有界閉なので, その sup, inf が max, min となり, 明らか．実際, 上限の性質より, ${}^{\exists}y_n \in f(X); y_n \uparrow y_0 := \sup f(X)$. $f(X)$: 閉より, $y_0 \in f(X)$, i.e., ${}^{\exists}x_0 \in X; y_0 = f(x_0) = \max f$. ■

・cpt Hausdorff 空間は, 正規空間 $(T_1 + T_3)$ (→ 後証 §2.4).

点列コンパクト sequentially cpt その集合の中の任意の点列が, 収束部分列を持つときをいう:

$K \subset X$: **seq. cpt** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} {}^{\forall}\{x_n\} \subset K, {}^{\exists}\{n_k\}; x_{n_k} \to {}^{\exists}x \in K$.

但し, **位相空間における点列の収束**とは, 極限点での任意の開近傍に対し, ある番号が存在し, その番号以上の任意の点列のメンバーが, その開近傍の元となることと定義する:

$x_n \to x$ in $(X, \mathcal{O}) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} {}^{\forall}U \in \mathcal{N}(x), {}^{\exists}N \geq 1; {}^{\forall}n \geq N, x_n \in U$.

この定義から, 次がすぐ分る: 「閉集合の中の任意の収束列の極限点もその閉集合の点となる」, i.e.,

$C \in \mathcal{C} \Rightarrow {}^{\forall}\{x_n\} \subset C; x_n \to {}^{\exists}x \in X, x \in C$. また, もし第一可算公理を満たすなら, 逆も成り立つ.

実際, もし, 極限点が閉集合の中に無いとすると, 補集合が開なので, 中に含まれる開近傍が存在するが, 収束の定義から, ある番号から先は全て, この近傍の点となる．これは点列自体が閉集合の点であることに反する．

また, 逆については, もし, C^c: 開でないとすると, ${}^{\exists}x \in C^c; {}^{\forall}U \in \mathcal{N}(x), U \not\subset C^c$．ここで, 第一可算公理（可算近傍基の

存在）を仮定すると, x の可算近傍基を $\mathcal{N}_0(x)=\{U_n\}$ として, 更に, n 番目までの共通部分を考えれば, $U_n\downarrow$ として良い. ${}^\forall n\geq 1, {}^\exists x_n\in U\cap C$. このとき, $x_n\to x$ となるが, $x\notin C$ なので, 仮定に反する. ■

可算コンパクト: 任意の可算個の開被覆に対し, 有限部分被覆が存在する.
$C\subset X$: **countably cpt**: $\overset{\text{def}}{\iff}$ ${}^\forall\{U_n\}$: O.C. of C, ${}^\exists\{n_k\}_{k\leq K};\{U_{n_k}\}_{k\leq K}$: O.C. of C.
局所コンパクト locally cpt: 各点の近傍で, 閉包が cpt なものが必ず存在する.
X: **loc. cpt**: $\overset{\text{def}}{\iff}$ ${}^\forall x\in X, {}^\exists U\in\mathcal{N}(x);\overline{U}$: cpt.

・cpt ⇒ 可算 cpt　定義より, 明らか

・点列 cpt ⇒ 可算 cpt

有限交叉性を持つ可算個の閉集合族 $\{F_n\}$ の共通元があることを示せば良い. 閉集合族の 1 番目から n 番目までの共通元を 1 つずつ固定すれば, 仮定から, 収束部分列がとれ, その極限点が全ての共通元となる. 即ち, ${}^\forall N\geq 1$, fix ${}^\exists x_N\in\bigcap_{n=1}^N F_n =: C_N\in\mathcal{C}$. 仮定より, ${}^\exists\{n_k\};{}^\exists x\in X;x_{n_k}\to x$. ${}^\forall N\geq 1$, $n\geq N$ なら $x_n\in C_N$. よって $x\in C_N$ かつ $x\in\bigcap_{N\geq 1}C_N=\bigcap_{N\geq 1}F_N$. ■

第一可算公理の下では, 可算 cpt ⇒ 点列 cpt もいえるので, 同値.

任意の点列に対し, n 番目から先, 全ての集合の閉包を考えれば, その全体は, 明らかに, 有限交叉性をもつ. 可算 cpt 性より, 全ての共通部分が空でないので, その元を 1 つをとれり, 後はその点に収束する部分列があることを示せば良い. もしその点のある開近傍があり, ある番号から先の点列を含まないとすると, その閉包も含まないので, 共通部分がその開近傍の補集合にあることになり矛盾. 従って, 任意の近傍に対し, 任意の番号から先の点列と交わりをもつ. 今, 可算近傍基があるので, その中に含まれる点列の元を 1 つずつ上手く固定すれば, それが収束部分列となる、詳しくは, 可算位相基の k 番目までの共通部分と点列の k 番目以上の番号との交わりで, 順に番号が大きくなるものを x_{n_k} としてとれば良い. 実際, $\bigcap_{N\geq 1}\overline{\{x_n;n\geq N\}}$ の元の 1 つを x として, x の可算近傍基を $U_k, k\geq 1$ として, $V_K=\bigcup_{k\leq K}U_k$ とおくと, これらも近傍基となる. ${}^\forall k\geq 1, V_k$ に含まれる k 以上の番号の真に増加する番号の点列の元を 1 つ x_{n_k} とする. $n_1\geq 1$ をとり, $n_k>n_{k-1}$ がとれたとして, $n_{k+1}\geq k\vee(n_k+1)$ なるものをとれば良い. ■

更に, 第二可算公理の下では, 可算 cpt ⇒ cpt, つまり, 同値.

可算位相基をもつので, 任意の開集合は, 位相基の高々可算和で表される. 従って, 任意の開被覆の和も開集合なので, 可算個の位相基の和で表される. 可算 cpt なら, その有限個の位相基で覆えて, 各位相基に対し, それを含む元の開被覆の中の開集合が 1 つ以上はあるので, それを 1 つずつ固定すれば, 結局, 有限個の開被覆があることになる. ■

可算 cpt + Lindelöf の性質 $\iff$ cpt. 但し, **Lindelöf の性質**: 任意の開被覆から可算個の開被覆が選べる.

他にコンパクト化という話題がある.

・局所 cpt Hausdorff 空間は, 1 点 cpt 化により, cpt Hausdorff とできる. しかも, この時に限り, 1 点 cpt 化可能.
$\mathbf{R}$ に無限遠点 ∞ を加えて, $\pm\infty$ を繋いでしまえば, 円周と同相となり, cpt となる. また複素平面に無限遠点 ∞ を加えて, 風呂敷で包んで、上 (の ∞) で結ぶようにしてしまえば, 球面となる. これを Riemann 球という. これも 1 点コンパクト化である.

2.2 連結 connected

連結集合 connected set は, 相対位相で, 2 つの空でない開集合で分割できないときをいう, このとき, 中に含まれる開かつ閉な部分集合は, 空か元の集合自身となる.

$A\subset X$; 連結 $\overset{\text{def}}{\iff}$ ${}^\forall U,V\in\mathcal{O};[U\cap A, V\cap A\neq\emptyset, U\cap V=\emptyset], A\not\subset U\cup V$ $\iff$ $B\subset A$: 開かつ閉 in A なら $B=\emptyset$ or $B=A$, 但し, B: 開 (閉) in A $\overset{\text{def}}{\iff}$ ${}^\exists U\in\mathcal{O}(\in\mathcal{C});B=A\cap U$.

連結でないとき, **不連結 disconnected** という. A: 不連結 $\overset{\text{def}}{\iff}$ ${}^\exists U,V\in\mathcal{O};U\cap A,V\cap A\neq\emptyset, U\cap V=\emptyset, A\subset U\cup V$.

・連結集合の連続像は連結. i.e., $f:X\to Y$: conti. X: connected ⇒ $f(X)$: connected.

背理法　もし連結でないとすれば, 2 つの空でない開集合で分割できる. この引き戻しを考えれば, 元の空間が不連結となり, 仮定に反する. ■

・連結集合の閉包とその間の部分集合も全て連結: A: 連結 ⇒ $A\subset{}^\forall B\subset\overline{A}$ も連結. .

背理法: もし間の部分集合が不連結なら, 2 つの開集合で, 空でない部分に分割できる. すると元の連結集合も分割され, 共に空でないことが示せて矛盾. 実際, もし, 一方が空なら, その閉包も空となり, 元の集合が空でない部分に分割できたことに反する. 記号を用いれば, もし $A \subset {}^{\exists}B \subset \overline{A}$ が不連結なら ${}^{\exists}U, V \in \mathcal{O}; U \cap B, V \cap B \neq \emptyset, U \cap V = \emptyset, B \subset U \cup V$. しかし, これは A: 不連結を意味する. なぜなら, もし $A \cap U = \emptyset$ なら $\overline{A \cap U} = \emptyset$. しかし, $\emptyset \neq B \cap U \subset \overline{A \cap U}$ だったので, 矛盾. ■

・連結集合族があり, どの 2 つの集合も交わりがあれば, 全ての和も連結.

背理法で容易. 実際, 和が連結でないとすると, 2 つの素な開集合で分離できる. しかし, それぞれに元の連結集合が 1 つずつは含まれ, 交わりがあることに反する. ■

・直積集合が連結 $\iff$ 元の集合が全て連結.

($\Rightarrow$) 射影は連続で, 連結の連続像も連結なので明らか.

逆は, まず, 2 個のとき. それぞれの元を 1 つ固定して, $(x_0, y_0) \in X \times Y$, 他方との直積 $\{x_0\} \times Y, X \times \{y_0\}$ を考えれば, どちらも, 直積位相で連結で, 固定した点の直積点 (x_0, y_0) を含むので, 上の結果から和 $\{(\{x_0\} \times Y) \cup (X \times \{y_0\})\}$ も連結. 更に, 最初に固定した点の 1 つだけ動かして考えれば, それらは全て, 他方と交わりを持ち, 全て連結なので, 全ての和も連結で, これは, 全体の直積である.

$$X \times Y = \bigcup_{x \in X} \{x\} \times Y = \bigcup_{x \in X} \{(\{x\} \times Y) \cup (X \times \{y_0\})\}.$$

一般の場合. 直積集合の点を 1 つ固定し, その任意の有限個の成分部分をそこでの全体集合に置き換えた直積集合の全体を考える. 要は, 任意の有限個の直積と他は, 固定した点の成分である直積集合の全体である. 最初に固定した点は, 共通元で, それぞれは連結なので, これら全ての和の閉包も連結で, これが全体の直積集合となる. (ここで, 非可算個のとき, 最初に固定した点の存在には, 選択公理を用いる.)

1 点 $(x_\lambda) \in X := \prod X_\lambda$ を固定.

$$\mathcal{Y} = \left\{ \prod Y_\lambda; {}^{\forall}n \geq 1, {}^{\forall}\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda, Y_{\lambda_k} = X_{\lambda_k},\ \text{かつ}\ Y_\lambda = \{x_\lambda\} \text{ if } \lambda \neq \lambda_k, \text{ k=1,}\ldots\text{, n} \right\}.$$

$\mathcal{Y}$ の各元は連結で, $(x_\lambda) \in \bigcap \mathcal{Y}$ なので, $\prod X_\lambda = \bigcup \mathcal{Y}$ は連結. ■

更に, 極大な連結部分集合を **連結成分 connected component** という.

例えば, $\mathbf{R}$ から 0 を除いた集合 $X = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ は, 連結でなく, 連結成分は $(-\infty, 0)$ と $(0, +\infty)$ となる.

・$\mathbf{R}$ 内の連結集合は区間 $[a, b], (a, b], (a, b), (a, b]$ のみである. 但し, $a = b$ なら, $[a, a] = \{a\}$ で, 他は空. $a = -\infty$ なら $(-\infty$ とみなし, $b = +\infty$ なら $+\infty)$ とみなす. 連結部分集合の上限と下限を考えれば, その間の点を全て含むので.

・連結集合上の実数値連続関数は, 中間値の定理を満たす. 即ち, 任意の 2 点の値の間の任意の値をとる元の点が存在する: X: connected, $f: X \to \mathbf{R}$: conti. $\Rightarrow {}^{\forall}a, b \in X; f(a) < f(b), {}^{\forall}\gamma \in (f(a), f(b)), {}^{\exists}c \in X; f(c) = \gamma$.

連結の連続像も連結で $\mathbf{R}$ の区間となるので, 明らか. ■

また, 任意の 2 点を結ぶその集合内の弧があるとき, **弧状連結 path connected** という. 但し, **2 点を結ぶ弧**とは, $[0, 1]$ からの連続写像で, $0, 1$ がその 2 点になるものがあり, その像をいう.

X: **path-connected** $\overset{\text{def}}{\iff} {}^{\forall}x, x' \in X, {}^{\exists}x \to x'$: a path, i.e., ${}^{\exists}f: [0, 1] \to X$: conti., $f(0) = x, f(1) = x'$, $f([0, 1])$ を x, x' **を結ぶ弧**といい, 簡単に $x \to x'$ と表す.

・$\mathbf{R}^2$ で次の線分の和は, 連結だが, 弧状連結ではない. $(0, 1] \times \{0\}, \{0\} \times (0, 1], \{1/n\} \times [0, 1] (n = 1, 2, ...)$

原点を含まないので, 弧状連結でないことは明らか, 連結を示せば良い. 最初の線分以外の和は, 弧状連結なので連結で, しかも閉包は, 最初の線分を含む. その閉包から原点を除いたものが, 対象の集合なので, 上の結果から, 連結. ■

局所連結 locally connected 近傍基が全て連結集合として選べるときをいう.

X: **loc. connected** $\overset{\text{def}}{\iff} {}^{\forall}x \in X, {}^{\exists}\mathcal{B}(x)$: a nbd-basis; ${}^{\forall}V \in \mathcal{B}(x)$: connected.

・局所連結 $\iff$ 任意の開集合の連結成分が開集合

X: loc. connected $\iff {}^{\forall}U \in \mathcal{O}$, U の任意の連結成分 $C \subset U$ が開.

$\Rightarrow$ 空でない開集合の連結成分を 1 つとる. 中の任意の点に対し, 局所連結より, 連結な近傍で連結成分に含まれるものがある. 実際, 連結な開近傍で元の開集合に含まれるものがあり, これが連結成分にも含まれる, (もし含まれなければ, 和が連結となり, 成分の極大性に反する.) 従って, 連結成分は開集合. ${}^{\forall}U \in \mathcal{O}, {}^{\forall}C \subset U$: 連結成分; $C \neq \emptyset$. ${}^{\forall}x \in C$, 局所連結より, ${}^{\exists}V \in \mathcal{N}(x)$: 連結で, $V \subset C$. 実際, もし $V \not\subset C$ とすると $V \cup C$ も連結となり, C の極大性に反する. よって C: 開.

逆は, 各点で, 連結な開近傍をとり, その全体が位相基となることを示せば良い. 任意の開集合とその点に対し, 点を含み開集合に含まれる連結成分がある. 実際, 1 点集合は連結なので, その点を含む開集合内の連結集合全体の和=連結成分となる. 仮定より, これは開集合となるので, これ自体が, 開近傍となり, この全体が位相基であることになる. ■

2.3 同相と、コンパクトと連結

・同相なら, コンパクト性と連結性は保たれる. (同相写像は, 全単射で, 連続かつ開写像なので, 容易に示せる.)

この事実を用いると次が分る:

・直線 $\mathbf{R}$ と平面 $\mathbf{R}^2$ は, 同相ではない！！

より正確には, 普通の大きさによる距離の入った直線 $\mathbf{R}$ と平面 $\mathbf{R}^2$, 即ち, ユークリッド空間の $\mathbf{R}$ と $\mathbf{R}^2$ は, 同相ではない！！

$\mathbf{R}$ から原点 0 を除くと, 連結ではなくなるが, $\mathbf{R}^2$ から 1 点を除いても連結のままなので, 同相ではない. (もし同相なら, 連結性は保たれるので.) ■

・$\mathbf{R}$ と $(0,1)$ は同相だが, これらと $(0,1]$ は同相ではない.

$(0,1]$ から 1 のみを除いても連結だが, $(0,1)$ から 1 点を除くと, 連結でなくなるため ■

・直線 $\mathbf{R}$ と円周 $\mathbf{S}^1$ も同相ではない. 同様に, 平面 $\mathbf{R}^2$ と球面 $\mathbf{S}^2$ も同相ではない. $\mathbf{R}^n$ と $\mathbf{S}^n$ も・・・。

$\mathbf{S}^n$ はコンパクトだが, $\mathbf{R}^n$ はコンパクトではないため. ■

【参考】 上に出てきた集合は, 何れも「濃度」は「連続無限」なので, 全単射な写像は作れるが, それが位相を保つことは出来ない！！ということを上の事実は表している.

例えば $(0,1]$ から $(0,1)$ への全単射な写像 f は, $f(1)=1/2, f(1/2)=1/3, \cdots, f(1/n)=1/(n+1)$ とし, 他は $f(x)=x$ と自分自身へ写せば良い.

$(0,1]^2$ から $(0,1]$ への全単射は, 点 (x,y) を無限小数表示して, $x=x_0.x_1x_2\cdots, y=y_0.y_1y_2\cdots$ その数を交互に並べた無限小数 $z=x_0y_0.x_1y_1x_2y_2\cdots$ を対応させれば良い. 但し, $1=0.999\cdots$ と表示.

2.4 分離公理 separation axioms

T_1 **(Fréchet の公理)** 任意の異なる 2 点が, 先の点の (開) 近傍で分離できる. (ということは, 入れ替えれば, 後の点の開近傍でも分離できる.) これは, 各点において, 近傍全ての共通元がその点のみと同値. このとき, 先の点 x 以外の点の分離開近傍 (x を含まない開近傍) の和を考えれば, $\{x\}$ の補集合で 開集合なので, 1 点集合は閉集合. つまり, T_1 は「任意の 1 点集合が閉集合」と同値.

$^\forall x, y; x \neq y, {}^\exists U_x \in \mathcal{N}_{\mathcal{O}}(x); y \notin U_x \iff {}^\forall x, \bigcap \mathcal{N}(x) = \{x\} \iff {}^\forall x, \{x\} \in \mathcal{C}.$

T_2**:** T_2 **空間=Hausdorff 空間**任意の異なる 2 点が, ぞれぞれの開近傍で分離できる.

これは, 各点で, その点の閉近傍=開近傍の閉包の全ての共通元がその点のみと同値.

$^\forall x, y; x \neq y, {}^\exists U_x \in \mathcal{N}_{\mathcal{O}}(x), V_y \in \mathcal{N}_{\mathcal{O}}(y); U_x \cap V_y = \emptyset. \iff {}^\forall x, \{x\} = \bigcap \mathcal{N}_{\mathcal{C}}(x).$

実際, もし共通元が他にもあれば, どんな閉近傍をとっても, 2 点含む. しかし, T_2 から, それぞれの開近傍で分離できるので, 元の点の方の開近傍の閉包は, もう一つの点の開近傍と素となり, 上の結果と矛盾する. 逆に, 異なる 2 点に対し, 仮定から一方のある開近傍の閉包は, 他方の点を含まない. ということは, その閉近傍の補集合は他方の点の開近傍で, これでそれぞれの開近傍で分離されたことになる.

$(\Rightarrow)$ もし $^\exists y \neq x; y \in \bigcap \mathcal{N}_{\mathcal{C}}(x)$ なら, $^\forall F_x \in \mathcal{N}_{\mathcal{C}}(x), y \in F_x$. これは T_2 に反する. 実際, T_2 から $^\exists U_x \in \mathcal{N}_{\mathcal{O}}(x); \overline{U_x} \not\ni y$. $F_x := \overline{U_x}$ は上の結果を満たさないので矛盾.

$(\Leftarrow)$ $^\forall x, y; x \neq y$ に対し, $y \in (\bigcap \mathcal{N}_{\mathcal{C}}(x))^c = \bigcup (\mathcal{N}_{\mathcal{C}}(x))^c$ より, $^\exists F_x \in \mathcal{N}_{\mathcal{C}}(x); y \notin F_x$. よって $U_x := F_x^o \in \mathcal{N}_{\mathcal{O}}(x), V_y := F_x^c \in \mathcal{N}_{\mathcal{O}}(y)$. ■

この空間では, 点列の極限の一意性が成り立つので, 普通はこの公理を仮定する.

自然数の全体に, 閉集合を, 全体と空と有限集合のみとして定義すると, 任意の開近傍は有限集合の補集合なので, 交わりは必ず, 無限集合となる. これは, T_1 ではあるが, T_2 にはならない.

このとき, 数列 $\{n\}$ を考えると, これは全ての自然数に収束することになる. 実際, どんな開近傍も有限集合の補集合なので, 必ず, ある番号から先を全て含むので, どんな点で近傍を考えても, その点に収束することになってしまう. ■

T_3 **(Vietoris の公理)** 任意の 1 点とそれを含まない閉集合が, ぞれぞれの開近傍で分離できる.

$^\forall x, {}^\forall F \neq \emptyset; x \notin F \in \mathcal{C}, {}^\exists U_x, V_F \in \mathcal{O}; x \in U_x, F \subset V_F, U_x \cap V_F = \emptyset.$

T_4 **(Tietoze の公理)** 任意の互いに素な 2 つの閉集合が, ぞれぞれの開近傍で分離できる.

$^\forall F, F' \neq \emptyset, \in \mathcal{C}; F \cap F' = \emptyset, {}^\exists f : X \to [0,1];$ conti. $f = 0$ on F, $f = 1$ on F'.

他に, T_1 よりもっと弱い分離公理として, 次があるが余り役に立たないので, 普通は考えないというか, T_1 を正確

に理解するためには役に立つ. T_0: 任意の異なる 2 点が, どちらかの点の開近傍で分離できる.

明らかに, $T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$ で, 更に,

正則空間 regular sp. $= T_1 + T_3 \iff T_2 + T_3$

正規空間 normal sp. $= T_1 + T_4 \iff T_2 + T_4$

明らかに,

・正規 $\Rightarrow$ 正則 $\Rightarrow$ Hausdorff $\Rightarrow T_1$

T^*: 任意の点とそれを含まない閉集合に対し, 点で 0, 閉集合上で 1 となる [0,1] に値をとる連続関数が存在する.

完全正則 completely regular $= T_1 + T^*$

・正規 $\Rightarrow$ 完全正則 $\Rightarrow$ 正則

最初の矢印は, 次の補題と T_1 から 1 点集合が閉なので明らか. 次の矢印も, T^* の連続関数での, 1/2 より小と 1/2 より大の引き戻しを考えれば明らか. ■

・ **【Urysohn の補題】** T_4 は次と同値: 任意の互いに素な 2 つの空でない閉集合に対し, それぞれの上で 0 と 1 となる $[0,1]$ に値をとる連続関数が存在する.

まず, T_4 と次の T_4' が同値であることに注意する:

T_4': 空でない閉集合とそれを含む任意の開集合に対し, その間に入る開集合で, その閉包も開集合に含まれるものがとれる.

$\emptyset \neq {}^\forall F$: closed, ${}^\forall U \supset F$: open, ${}^\exists V \in \mathcal{O}; F \subset V \subset \overline{V} \subset U$.

T_4 なら, T_4' の仮定の開集合の方の補集合を考えれば, 交わらない閉集合が 2 つあることになり, 先にある閉集合の開近傍が求めるものとなる, i.e., $F' := U^C, V := U_F$. 逆は, 後の方の補集合を考えれば, 他方を含む開集合となることから, 容易に分る, i.e., $U := (F')^c, U_F := V, U_{F'} := (\overline{V})^c$.

T_4' から連続関数を作るには, 閉集合を含む開集合を G_1 とし, 初めに間にとれる開集合を G_0 として, 更に, その閉包とそれを含む開集合の間に同様な開集合 $G_{1/2}$ をとり, さらに $G_0, G_{1/2}$ と, $G_{1/2}, G_1$, それぞれの間に開集合 $G_{1/4}, G_{3/4}$ というように, 2 進有理数 $r = k/2^n$ に対応する開集合 G_r を取って行く. f を G_0 上 0, G_1^c 上 1 として, その間 (G_0 と G_1 の間) で, $f(x) = \inf\{r; x \in G_r\}$ と定義すれば, これが連続となる.

逆は, T^* なら T_3 のときと同様. 即ち, 1/2 より小と 1/2 より大の引き戻しで OK. ■

・cpt Hausorff は正規

cpt の中の閉集合が cpt であることと, T_2 より, まず, 1 点とそれを含まない空でない閉集合が, それぞれを囲む開集合で分離でき, 更に, そのことから, 2 つの交わらない閉集合もそれぞれを囲む開集合で分離できる. ■

・正則 + 第二可算公理は正規

交わりのない空でない 2 つの閉集合をとる. 正則性より, 1 点とそれを含まない空でない閉集合に対し, 1 点の開近傍で, その閉包が, 閉集合と交わらないものがとれる. しかも可算位相基を持つことから, その開近傍として, その可算位相基からとれる. 従って, 可算位相基のメンバーで, 先の閉集合の各点と後の閉集合に対応するものと, 閉集合を入れ替えたものに対応するものがあり, それらを使って, 上手く閉集合を分離する開集合を作ることができる.

実際, F_1, F_2 を交わりのない空でない閉集合として, 可算位相基 $\mathcal{B}$ の一部を

$\mathcal{B}_1 \equiv \{B_{m_j}\} \ni B \iff x \in F_1, {}^\exists B \in \mathcal{B}; x \in B \subset \overline{B} \subset F_2^c$

$\mathcal{B}_2 \equiv \{B_{n_k}\} \ni B \iff y \in F_2, {}^\exists B \in \mathcal{B}; y \in B \subset \overline{B} \subset F_1^c$

と定義し, $U_1 = B_{m_1}, V_1 = B_{n_1} \setminus \overline{U_1}$, $U_k = B_{m_k} \setminus (\bigcup_{j=1}^{k-1} V_j), V_k = B_{n_k} \setminus (\bigcup_{j=1}^{k} U_j)$ とおけば, どの U_j とどの V_k も交わりはもたないので, 次の U, V も交わりを持たない:

$$U := \bigcup_{k\geq 1} U_k = \bigcup_{k\geq 1} B_{m_k} \supset F_1, V := \bigcup_{k\geq 1} V_k = \bigcup_{k\geq 1} B_{n_k} \supset F_2.$$

■

3 距離空間において

距離空間は, 可算近傍基をもつので, 第一可算公理を満たし, 更に, T_1, T_4 を満たすので, 正規空間でもある.

・ 可分 (稠密な可算部分を持つ) と第二可算公理は同値.

・ 全有界（任意の正数に対し, それ以下の直径の有限開被覆を持つ) $\Rightarrow$ 可分.

・距離空間において, 次は同値: コンパクト, 可算コンパクト, 点列コンパクト, 全有界かつ完備

但し, **完備 complete** とは, 任意の Cauchy 列が収束することで, コーシー Cauchy 列 $\{a_n\}$ とは, $d(a_n, a_m) \to 0$ $(m, n \to \infty)$.

・ユークリッド空間は完備.

本質は 1 次元で, Cauchy 列は有界で, Bolzano-Weierstrass の定理より, 収束部分列がある. 元が Cauchy 列なので, 同じ極限に収束する (ことが容易に示せる). ■

同値な距離: 距離空間 (X, d) において, 別の距離 d' があり, 恒等写像が同じ位相を定める時, **同値**であるという. $d' \cong d$ と表す.

・$d' \cong d \iff$ 「$d(x_n, x) \to 0 \iff d'(x_n, x) \to 0$」

$d_1(x, y) := d(x, y)/(1 + d(x, y)), d_2(x, y) = d(x, y) \wedge 1$ とおくと, $d_1 \cong d_2 \cong d$.

直積距離空間 product metric sp.

(X_n, d_n) を距離空間とする.

有限個のとき: $X = \prod_{n=1}^N X_n$ の距離を, $d(x, y) = (\sum_{n=1}^N d_n(x_n, y_n)^2)^{1/2}$ と定義すれば, (X, d) は距離空間となる.

可算無限のとき: $X = \prod_{n=1}^\infty X_n$ は, 次の距離で距離空間となる:

$$d(x, y) := \sum_{n=1}^\infty d_n(x_n, y_n) \wedge 2^{-n}.$$

集合距離 $d(A, B) := \inf\{d(x, y); x \in A, y \in B\}$

特に, $d(x, A) := \inf_{y \in A} d(x, y)$.

これに対し, $|d(x, A) - d(y, A)| \le d(x, y)$ が成り立ち, $d(x, A)$ は x の連続である.

${}^\forall z \in A, d(x, A) \le d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z)$. $z \in A$ の任意性より, $d(x, A) \le d(x, y) + d(y, A)$, i.e., $d(x, A) - d(y, A) \le d(x, y)$. x, y を入れ替えても同じなので題意を得る. ■