線形代数学 I (Liniear Algebra I)

平場　誠示 (Seiji HIRABA)

2018 年 5 月 3 日

目 次

0　導入 (Introduction)

高校では, 2 次元, 3 次元のベクトル (平面ベクトル・空間ベクトル) については学んできたと思う.

大学では, これらを, n 次元まで一般化し, 更に, 次のようなベクトル空間まで, 拡張する.

ベクトル空間とは一般の集合 V に対し, 次のように定義される. ここで「$^\forall \boldsymbol{a} \in V$, 」とは「$V$ の任意の元 $\boldsymbol{a}$ に対して」で, 「$^\exists \boldsymbol{a}' \in V;\sim$」 は「ある V の元 $\boldsymbol{a}'$ が存在して〜をみたす」と解釈する.

定義 0.1　$K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ (場合によっては $K = \mathbb{Q}$).

集合 V が K **ベクトル空間**, もしくは **抽象** K **ベクトル空間** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 和と定数倍が定義され, それらについて普通の計算ができる, 即ち, $^\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$, $^\forall \alpha \in K$, $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in V$, $\alpha \boldsymbol{a} \in V$;

(和の結合則)　$^\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in V$, $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$.

(和の可換性)　$^\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$, $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$.

(零元の存在)　$^\exists \boldsymbol{0} \in V; ^\forall \boldsymbol{a} \in V, \boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$.

(マイナスの存在)　$^\forall \boldsymbol{a} \in V, ^\exists \boldsymbol{a}' \in V$; $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$. この $\boldsymbol{a}' = -\boldsymbol{a}$ と表す.

(1 によるスカラー倍)　$^\forall \boldsymbol{a} \in V, 1 \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$.

(スカラー倍の結合則)　$^\forall \boldsymbol{a} \in V, ^\forall \alpha, \beta \in K$, $\alpha(\beta \boldsymbol{a}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{a}$.

(分配則)　$^\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V, ^\forall \alpha, \beta \in K$, $\alpha(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \alpha \boldsymbol{a} + \alpha \boldsymbol{v}$, $(\alpha + \beta)\boldsymbol{a} = \alpha \boldsymbol{a} + \beta \boldsymbol{a}$.

このとき, V の元を**ベクトル (vector)**, K の元を**スカラー (scalar)** という.

しかし, 成分が全て, 数である「数ベクトル空間」については, もっと簡単に定義ができる.