

関数解析 (Functional Analysis)

平場 誠示 (Seiji HIRABA)

2018 年 5 月 11 日

目次

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | 線形代数復習 | 1 |
| 1.1 | n 次元ユークリッド空間 \mathbf{R}^n or \mathbf{C}^n | 1 |
| 1.2 | 線形空間 (ベクトル空間) (Linear sp. (Vector sp.)) | 1 |
| 2 | ノルム空間 (Normed Spaces) | 2 |
| 2.1 | ノルム (Norm) | 2 |
| 3 | バナッハ空間 (Banach Spaces) | 2 |
| 3.1 | Banach 空間の例 (Examples of Banach sps) | 3 |
| 3.1.1 | 連続関数空間 (Continuous function space) | 3 |
| 3.1.2 | L^p 空間 (L^p -sp.) | 4 |
| 3.2 | 可分と同値なノルム (Separable & equivalent norms) | 6 |
| 3.3 | 完備化 (Completion) | 6 |
| 4 | ヒルベルト空間 (Hilbert Spaces) | 7 |
| 4.1 | プレ・ヒルベルト空間 (内積空間) (Pre-Hilbert sp. (Inner prod. sp.)) | 7 |
| 4.2 | ヒルベルト空間 (Hilbert sp.) | 8 |
| 4.3 | 射影定理 (Projection theorem) | 8 |
| 4.4 | 正規直交系 (ONS=orthonormal system) | 10 |
| 5 | 線形作用素 (Linear Operators) | 12 |
| 5.1 | 有界作用素の例 (Examples of bounded operators) | 13 |
| 5.2 | 逆作用素 (Inverse operators) | 13 |
| 6 | 三大基本原理 (一様有界性原理, 開写像定理, 閉グラフ定理) | 15 |
| 6.1 | 一様有界性原理 (Uniform bounded principle) | 16 |
| 6.2 | 開写像定理 (Open mapping theorem) | 16 |
| 6.3 | 閉グラフ定理 (Closed graph theorem) | 17 |
| 7 | 線形汎関数 (Linear Functionals) | 18 |
| 7.1 | 共役空間 (Dual spaces) | 18 |
| 7.2 | ハーン・バナッハの拡張定理 (Hahn-Banach's extension theorem) | 19 |

| | | |
|----------|--------------------------|-----------|
| A | 補充証明 | 21 |
| A.1 | 一般の測度空間での L^p の完備性 | 21 |
| A.2 | ノルム空間の完備化の定理と証明について | 21 |
| A.3 | ソボレフ空間 $H^{k,p}(\Omega)$ | 22 |
| A.4 | ワイエルシュトラスの多項式近似 | 23 |
| A.5 | 有限次元ノルム空間の任意のノルムの同値性の証明 | 24 |
| A.6 | 中線定理 | 24 |
| A.7 | ヒルベルト空間 $A^2(\Omega)$ | 25 |
| B | 弱収束, 共役作用素 | 26 |
| B.1 | 弱収束 | 26 |
| B.2 | 共役作用素 | 27 |
| C | レゾルベントとスペクトル | 27 |
| D | コンパクト作用素 | 28 |

線形代数学において、線形空間、基底、内積、線形写像、行列など、有限次元での基本的な事柄を学んだと思う。それらを数列や関数の集合などの無限次元空間においても話ができるように一般化・抽象化したものが、関数解析と呼ばれる分野である。

ユークリッド空間 \mathbf{R}^n , \mathbf{C}^n や数列空間 ℓ^p , 連続関数の空間 $C([a, b])$, 可積分関数の空間 $L^p(\Omega)$ ($\Omega \subset \mathbf{R}^n$) などに大きさの概念であるノルム $\|\cdot\|$ を入れ、その空間の性質や、さらにそれらの空間の間の線形写像の性質を調べて行くのである。

メリットとしては、微分方程式や積分方程式を満たす関数 (= 解) があるか無いかを、一般的な結果から導くことが出来たり、さらに解が存在するとき、その解を具体的に表現出来たりすることがある。また抽象的に見ることにより、現象の理解が、より容易になったりすることもある。

初めは、抽象化により、話が逆に見えにくくなったという印象をもつ人もいるかも知れないが、常に上に挙げた具体例を頭に描きながら、理解して行って欲しい。基本となるのはあくまで線形代数で、それをより一般の空間に発展させて行ったものであり、極端に難しいことをしている訳では無い! ということを強く言うておく。ただ、有限次元と無限次元との違いは、かなり大きいもので、その点には注意し、尚且つ、意識して勉強して行ってもらいたいと思う。

本テキストは、増田 久弥 著 「関数解析」 裳華房の内容に沿って述べてあるが、半年間の講義用という制限の下で書かれているので、色々な例や定理など、省略した部分は大きい。もっと詳しく知りたい方は是非、上記、教科書をご覧頂きたい。