離散グラフ上のマルコフ過程

(Markov Processes on Discrete Graphs)

平場　誠示 (Seiji HIRABA)

2019 年 6 月 3 日

目 次

1　確率論の基礎 (Basics of Probability Theory) **1**
- 1.1　確率空間と確率変数 (Probability spaces and random variables) 1
- 1.2　期待値, 平均値 (Expectations, Means) 2
- 1.3　大数の法則 (LLN=Law of Large Numbers) 3

2　離散時間マルコフ連鎖 (Discrete-time Markov Chains) **6**
- 2.1　基本的な例 (Basic examples) 6
- 2.2　時間的一様マルコフ連鎖 (Time homogeneous Markov chains) 6
- 2.3　d 次元ランダムウォーク (d-dimensional random walks) 11
- 2.4　ゴルトン-ワトソン過程 (Galton-Watson processes) 14

3　連続時間マルコフ連鎖 (Continuous-time Markov Chain) **17**
- 3.1　指数時間 (Exponential times) 17
- 3.2　ポアッソン過程 (Poisson processes) 18
- 3.3　連続時間ランダムウォーク (Continuous-time random walks) 22
- 3.4　連続時間マルコフ連鎖と推移確率 (Continuous-time Markov chains & transition probabilities) 23
- 3.5　連続時間ゴルトン-ワトソン過程 (Continuous-time Galton-Watson processes) . . 25

4　分枝ランダムウォーク (Branching Random Walk) **27**

5　コンタクト・プロセス (Contact Process) **32**

6　補章 **35**
- 6.1　大数の強法則の証明 35
- 6.2　特性関数と分布の収束 (Characteristic functions & convergence of distributions) . 38
- 6.3　中心極限定理 (CLT=Central Limit Theorem) 41

参考書　R. B. シナジ　著　「マルコフ連鎖から格子確率モデルへ」 今野紀雄／林　俊一　訳　シュプリンガー (2001 年)

1 確率論の基礎 (Basics of Probability Theory)

確率論は測度論が分からないと理解できないと言われるが, 確かにそういう面もあることは否めない. しかし扱う対象によってはそれ程, 詳しい知識が無くても理解できる分野がある. 本章では確率論を学ぶに際して必要な定義や性質について, 測度論の知識を仮定せずに理解できるよう, 最小限の事柄について解説する.

1.1 確率空間と確率変数 (Probability spaces and random variables)

確率論とは, 必ず, ある適当な確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ があり, その上で定義された, ランダムな量＝確率変数 $X = X(\omega)$ の様々な性質 (確率) を調べて行こうとする学問である.

ここで $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ が**確率空間 (probability space)** とは次の性質をみたすものをいう.

- Ω はある集合 (元を $\omega \in \Omega$ で表す)
- $\mathcal{F}$ $(\subset 2^\Omega)$ は Ω 上の σ **集合体 (σ-field)**; (2^Ω は Ω の全部分集合族)
  (1) $\Omega \in \mathcal{F}$
  (2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$
  (3) $A_n \in \mathcal{F}$ $(n = 1, 2, \dots) \Rightarrow \bigcup A_n \in \mathcal{F}$
- $P = P(d\omega)$ は可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の**確率測度 (probability measure)**, i.e., 全測度 1 の測度; $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ は集合関数で次をみたす.
  (1) $P(\Omega) = 1$
  (2) $A_n \in \mathcal{F}$ $(n = 1, 2, \dots)$ が互いに素 $\Rightarrow P(\bigcup A_n) = \sum P(A_n)$ (σ **加法性**)

問 1.1 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とするとき, 以下が成立することを示せ.

(1) σ-集合体は可算個の集合演算に関して閉じていることを示せ. 即ち, $\mathcal{F}$ を σ-集合体とし, $A, B, A_n \in \mathcal{F}$ とする. 次も $\mathcal{F}$ に属することを示せ.

$$\emptyset, \quad A \cap B, \quad A \setminus B, \quad A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A), \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

これから $\overline{\lim}\, A_n = \limsup A_n := \bigcap_{N \geq 1} \bigcup_{n \geq N} A_n$, $\underline{\lim}\, A_n = \liminf A_n := \bigcup_{N \geq 1} \bigcap_{n \geq N} A_n \in \mathcal{F}$ も分かる.
($\overline{\lim} = \inf\sup$, $\underline{\lim} = \sup\inf$ と覚えると良い.)

(2) $P(\emptyset) = 0$, $A_k \in \mathcal{F}$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ が互いに素 $\Rightarrow P(\bigcup_{k=1}^n A_k) = \sum_{k=1}^n P(A_k)$ (**有限加法性**).

(3) $A, B \in \mathcal{F}; A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$ (**単調性**).

(4) $A_n \in \mathcal{F}$, $A_n \uparrow \Rightarrow P\left(\bigcup A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$.

(5) $A_n \in \mathcal{F}$, $A_n \downarrow \Rightarrow P\left(\bigcap A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$. 上のと合わせて**確率の単調連続性**という.

(6) $A_n \in \mathcal{F}$ $(n \geq 1) \Rightarrow P\left(\bigcup A_n\right) \leq \sum P(A_n)$ (**劣加法性**).

(7) (**Borel-Cantelli の補題**) $A_n \in \mathcal{F}$ $(n \geq 1)$, $\sum P(A_n) < \infty \Rightarrow P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 0$, i.e., $P\left(\liminf_{n\to\infty} A_n^c\right) = 1$.

この確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で定義された関数 $X = X(\omega) : \Omega \to \mathbf{R}$ が $\{X \leq a\} := \{\omega \in \Omega; X(\omega) \leq a\} \in \mathcal{F}$ $({}^\forall a \in \mathbf{R})$. をみたすとき**確率変数 (random variable)** という. 特に X が可算個の値 $S = \{a_j\}_{j\geq 1} \subset \mathbf{R}$ しかとらないとき, この条件は $\{X = a_j\} \in \mathcal{F}$ $({}^\forall j \geq 1)$ となる.

X_k を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の実数値確率変数とする $(k = 1, 2, \ldots, n)$. このとき $\{X_k\}_{k=1}^n$ が**独立 (independent)** であるとは

$$P(X_1 \leq a_1, \cdots, X_n \leq a_n) = P(X_1 \leq a_1) \cdots P(X_n \leq a_n) \quad ({}^\forall a_k \in \mathbf{R}, k = 1, \ldots, n).$$

さらに上で n が無限のとき $\{X_k\}_{k\geq 1}$ が独立であるとは ${}^\forall N \geq 1$ に対して $\{X_k\}_{k=1}^N$ が独立なときをいう. 特に X_k が可算個の値 $S = \{a_j\}_{j\geq 1}$ しかとらないとき, 上の式は次のように変えても良い:

$$P(X_1 = b_1, \cdots, X_n = b_n) = P(X_1 = b_1) \cdots P(X_n = b_n) \quad (b_k \in S, k = 1, \ldots, n).$$

また $\mu_X(A) = P(X \in A)$ を X の**分布 (distribution)** といい, $F(x) = P(X \leq x)$ を X の**分布関数 (distribution function)** という.

1.2 期待値, 平均値 (Expectations, Means)

一般に確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の確率変数 X の**期待値 (expectation)** or **平均値 (mean)** は

$$EX = E[X] := \int X dP = \int_\Omega X(\omega) P(d\omega)$$

と確率測度 P での Lebesgue 積分として定義される. しかしここではルベーグ積分論が苦手な人にも理解しやすいよう, 確率変数 X は $\overline{\mathbf{Z}} := \mathbf{Z} \cup \{\pm\infty\}$ に値をとるものとする. このとき期待値 EX は次のように定義される.

(1) $X \geq 0$ のとき

$$EX := \sum_{n=0}^{\infty} nP(X = n) + \infty \cdot P(X = \infty).$$

$(P(X = \infty) = 0$ なら $\infty \cdot P(X = \infty) = 0$ とする. また $P(X = \infty) > 0$ なら $EX = \infty$.)

(2) X 一般のときは $X^+ := X \vee 0$, $X^- := (-X) \vee 0$ とおき (このとき $X^\pm \geq 0$, $X = X^+ - X^-$ となる → 確かめよ.) $EX := EX^+ - EX^-$ とおく. 但し, $\infty - \infty$ となるときは定義されないとする.

この定義を形式的に表せば $EX = \sum_{n\in\overline{\mathbf{Z}}} nP(X = n)$ で, 一般の関数 $f : \overline{\mathbf{Z}} \to \mathbf{R}$ に対しても, 形式的に $Ef(X) = \sum_{n\in\overline{\mathbf{Z}}} f(n)P(X = n)$ と定義する. (厳密には上のように $\sum_{n;f(n)>0}$ と $\sum_{n;f(n)<0}$ で分けて定義する.)

確率変数 X に対して, その分散を $V(X) := E[(X - EX)^2] = E[X^2] - (EX)^2$ で定義する (最後の等号を確かめよ). これから $(EX)^2 \leq E[X^2]$ も成り立つ.

定理 1.1 (Chebyshev の不等式) $p \geq 1$ とする．このとき $^\forall a > 0$ に対し,

$$P(|X| \geq a) \leq \frac{E[|X|^p]}{a^p}.$$

[証明] $P(|X| \geq a) = P(|X|^p \geq a^p)$ より $p = 1$ として示せば十分.

$$E|X| = \sum_{n \geq 1} nP(|X| = n) \geq \sum_{n \geq a} nP(|X| = n) \geq a \sum_{n \geq a} P(|X| = n) = aP(|X| \geq a).$$

■

定理 1.2 $X_1, \ldots, X_n$ を $\overline{\mathbf{Z}}$ に値をとる確率変数として, $E[X_k^2] < \infty$ $(k = 1, \ldots, n)$ とする．このとき $X_1, \ldots, X_n$ が独立なら, $E[X_j X_k] = E[X_j]E[X_k]$ $(j \neq k)$. さらに平均 $E[X_k] = 0$ なら

$$E\left[\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2\right] = \sum_{k=1}^{n} E[X_k^2].$$

[証明] (1) $j \neq k$ なら独立性から $P(X_j = m, X_k = n) = P(X_j = m)P(X_k = n)$ より

$$E[X_j X_k] = \sum_{m,n} mnP(X_j = m, X_k = n) = \sum_{m,n} mnP(X_j = m)P(X_k = n) = E[X_j]E[X_k].$$

(2) 展開式 $\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} X_k^2 + \sum_{j \neq k} X_j X_k$ と (1) より $j \neq k$ なら $E[X_j X_k] = E[X_j]E[X_k] = 0$ となることから明らか. ■

1.3 大数の法則 (LLN=Law of Large Numbers)

コイン投げで, 投げる回数を増やしていくと表の出る割合が 1/2 に近づいていくという現象がある．これが大数の法則の典型的な例であるが, このとき 1 回毎にコインを投げるという行為は独立である.

数式化するには n 回目にコインを投げて, 表なら $X_n = 1$, 裏なら $X_n = 0$ と決める．このとき確率平均は $EX_n = 1/2$ (ちなみに分散は $V(X_n) = 1/2$ で有界). このとき n 回まで投げて, 表の出た回数の算術平均は $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ で, 大数の法則とはこれが $n \to \infty$ のとき, 確率平均の 1/2 に「近づく」ということである.

定理 1.3 (大数の弱法則 (Weak Law of Large Numbers)) $X_1, X_2, \ldots$ を独立な確率変数で，平均一定 $EX_n = m$，分散が有界 $v := \sup_n V(X_n) < \infty$ であるとする．このとき次が成り立つ：$^\forall \varepsilon > 0$ に対して,

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - m\right| \geq \varepsilon\right) = 0, \quad \text{i.e.,} \quad \lim_{n \to \infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - m\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

[証明] $\{X_n\}$ が独立であるから $\{\widetilde{X}_n = X_n - m\}$ も独立となる (確かめよ). よって

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - m = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (X_k - m)$$

から, X_n の代わりに $\widetilde{X}_n$ を考えることにより，初めから $m=0$, i.e., $E[X_n]=0$ として良い．このとき $V(X_n)=E[X_n^2]$ で, 前命題から

$$E\left[\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)^2\right]=\sum_{k=1}^n E[X_k^2]=\sum_{k=1}^n V(X_k)\le n\sup_n V(X_n)=nv.$$

よって $^\forall\varepsilon>0$ に対して,

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k\right|\ge\varepsilon\right) &= P\left(\left|\sum_{k=1}^n X_k\right|\ge\varepsilon n\right)\le\frac{E[(\sum_{k=1}^n X_k)^2]}{\varepsilon^2 n^2} \\ &\le \frac{nv}{\varepsilon^2 n^2}=\frac{v}{\varepsilon^2 n}\to 0\quad(n\to\infty). \end{aligned}$$

■

上の定理と同じ条件のもとで, もっと強い結果が成り立つ. それが次の定理である.

定理 1.4 (大数の強法則 (Strong Law of Large Numbers)) $X_1, X_2, \ldots$ を独立な確率変数で，平均一定 $EX_n=m$，分散が有界 $v:=\sup_n V(X_n)<\infty$ であるとする．このとき次が成り立つ：

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k=m\right)=1.$$

注意 1.1 一般に, 平均が一定でない場合でも, 次が成り立つ.

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n (X_k-EX_k)=0\right)=1.$$

この証明については補章に述べるので, 興味のある人は自分で勉強してもらいたい. ちなみに次のもっと強い条件のもとでは簡単に証明できる.

[$\sup E[X_n^4]<\infty$ **のもとでの定理 1.4 の証明**] X_n の代わりに X_n-m を考えることにより, $m=0$, i.e., $E[X_n]=0$ として示せばよい．まず $\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)^4$ の展開式を考えるのだが，独立性と平均が 0, さらに $E[X^2]\le(E[X^4])^{1/2}$ に注意して，

$$E\left[\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)^4\right]=\sum_{k=1}^n E[X_k^4]+\sum_{i\ne j,1\le i,j\le n} E[X_i^2]E[X_j^2]\le n^2\sup_k E[X_k^4]$$

をえるから，単調収束定理 (or Fubini の定理) を用いて

$$E\left[\sum_{n=1}^\infty\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k\right)^4\right]=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^4}E\left[\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)^4\right]\le\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^2}\sup_k E[X_k^4]<\infty$$

をえる．これは $P\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k=0\right)=1$ を意味する． ■

さらに重要な話題として, 次の中心極限定理があるが, その証明についても補章に述べる.

定理 1.5 (CLT) 確率変数列 $\{X_n\}$ を独立同分布 (independent identically distributed = i.i.d.) とする. その平均を $EX_1 = m$, 分散を $V(X_1) = v$ とすると $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(X_k - m)$ の分布は平均 0, 分散 v の正規分布 $N(0,v)$ に収束する, i.e., 任意の $a < b$ に対し,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a < \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}(X_k - m) < b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2v}}\,dx.$$

言い換えれば, $\dfrac{1}{\sqrt{nv}}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(X_k - m)$ の分布は平均 0, 分散 1 の正規分布 $N(0,1)$ に収束する,

ここで, 独立性と分布の性質について少し述べておく. $\mathcal{B}^1 = \mathcal{B}(\mathbf{R}^1)$ を 1 次元 Borel 集合体とする. 実確率変数列 $X_1,\ldots,X_n$ に対し, $\boldsymbol{X} = (X_1,\ldots,X_n)$ として, その結合分布を $\mu_{\boldsymbol{X}}(A_1\times\cdots\times A_n) = P(X_1\in A_1,\ldots,X_n\in A_n)$ $(A_i\in\mathcal{B}^1)$ と定義する.

定理 1.6 実確率変数列 $X_1,\ldots,X_n$ が独立なら, $\boldsymbol{X} = (X_1,\ldots,X_n)$ として,

$$\mu_{\boldsymbol{X}} = \bigotimes_{i=1}^{n}\mu_{X_i} \quad \text{i.e.,} \quad \mu_{\boldsymbol{X}}(A_1\times\cdots\times A_n) = \mu_{X_1}(A_1)\cdots\mu_{X_n}(A_n).$$

これは半直線 $(-\infty, a]$ の全体で生成される σ 加法族が $\mathcal{B}^1$ となることから容易に分かる.

定理 1.7 実確率変数 X, Y が独立なら, 有界 Borel 関数 $f(x,y)$ に対し,

$$E[f(X,Y)] = E\left[E[f(x,Y)]|_{x=X}\right] = E\left[E[f(X,y)]|_{y=Y}\right].$$

これは分布を用いて表せば,

$$\int_{\mathbf{R}^2} f(x,y)\mu_{(X,Y)}(dx,dy) = \int_{\mathbf{R}^2} f(x,y)\mu_X(dx)\mu_Y(dy)$$

となるので, 上の結果から明らか.

例 1.1 実確率変数 X, Y が独立なら,

$$P(X<Y) = \int_{\mathbf{R}} P(x<Y)\mu_X(dx).$$

2 離散時間マルコフ連鎖 (Discrete-time Markov Chains)

確率過程とは時間とともにランダムに変化・運動していく対象を指すが, まずは離散時間において「マルコフ連鎖」と呼ばれる確率過程について解説する.

2.1 基本的な例 (Basic examples)

マルコフ連鎖とは未来の行動が, 現在の状態にのみによって決まり, 過去の行動には依存しない確率過程をいう. 正確な定義は後で述べるとして, まず, 基本的な例を 2 つ挙げよう. 一つ目は, **ランダムウォーク**と呼ばれるものである. ランダムウォークは日本語で「酔歩」というが, 確率過程の中でも, 最も単純なモデルで様々な性質が研究されている.

例 2.1 整数 $\mathbf{Z}$ 上での**ランダムウォーク (random walk)** (X_n, P) で, 時刻 0 で, 原点 O を出発するとする; $X_0 = \mathrm{O}$. $0 < p < 1$ に対し, 時刻 1 で, $+1$ に確率 p でジャンプし, -1 に確率 $q = 1-p$ でジャンプする. さらに一般に, 時刻 n で場所 x にいるなら時刻 $n+1$ で, $x+1$ へ確率 p で, $x-1$ へ確率 q でジャンプする;

$$P(X_{n+1} = x+1 \mid X_n = x) = p, \quad P(X_{n+1} = x-1 \mid X_n = x) = q.$$

時刻 n から将来どこへ行くかは, 時刻 n での場所のみに依存し, それ以前にいた場所には依存しない. これがマルコフ性といわれるものである.

2 つ目は, **ゴルトン-ワトソン過程 (BGW or GW 過程)** と呼ばれる家系に関する世代交代の人口モデルで, Bienaymé, Galton, Watson の 3 人が家系が頻繁に失われていくことに気づき, 1 つの家系が永久に存続する確率を計算した.

例 2.2 各世代の男性数を表す, **ゴルトン-ワトソン過程 (Bienaymé-Galton-Watson process)** (Z_n, P) とは, まず各男性には, 生存中に Y 人の男子が生まれると仮定する. 但し, Y は非負整数 $k = 0, 1, 2, \ldots$ に対し, $P(Y = k) = p_k$ をみたすとする (p_k は分布で, $p_k \geq 0, \sum p_k = 1$ をみたす). Z_n を第 n 世代の男性の数とする. ここで出発点は 1 人の祖先とする; $Z_0 = 1$. 生まれた各男性は独立に Y と同じ確率で男子を残して行くとする. このモデルでは, 家系が永久に存続する確率が正かどうかは, 子孫の平均値 $m = \sum kp_k$ に依存することが示せる.

2.2 時間的一様マルコフ連鎖 (Time homogeneous Markov chains)

本節では次の結果を紹介する.

定理 2.1 可算集合 S に値をとる既約で時間的一様なマルコフ連鎖は再帰的か, 過渡的のいずれかの状態になる.

さて数学が一般に嫌われるのは, 「同じ日本語なのに聞いていて, チンプンカンプンで理解不能だから」と良く言われるが, 初めて聞く人にとってはこれがまさにそうだろう. 原因は単純で, それは数学用語の定義が分っていないからである.

「既約」「時間的一様」「マルコフ連鎖」「再帰的」「過渡的」

マルコフ連鎖とは, 次にどう動くかが, 現在の状況のみに依存して, 過去には無関係であるようなものをいうが, いい加減な表現をすれば「行き当りばったりプロセス」あるいは「その場しのぎプロセス」といっても良いだろう. 正確な定義は次のとおりである.

S を可算集合として, S に値をとる確率過程 $(X_n, P) = (X_n(\omega), P(d\omega))$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ が次をみたすとき**マルコフ連鎖 (Markov Chain)** という:

(M1) **[マルコフ性]** $n \geq 1, j_0, j_1, \dots, j_n, k \in S$ に対し,

$$P(X_{n+1} = k \mid X_0 = j_0, X_1 = j_1, \dots, X_n = j_n) = P(X_{n+1} = k \mid X_n = j_n).$$

さらに次の性質をみたすとき**時間的一様なマルコフ連鎖**という.

(M2) **[時間的一様性]** $n \geq 1, j, k \in S$ に対し,

$$P(X_{n+1} = k \mid X_n = j) = P(X_1 = k \mid X_0 = j) \ (=: q(j,k) \text{ と表す}).$$

本講義では時間的一様でないものは扱わないので以下ではマルコフ連鎖といったときは全て, 時間的一様なマルコフ連鎖を指すものとする.

X_0 の分布 $\mu = \{\mu_j\}$; $\mu_j = P(X_0 = j)$ を**初期分布 (initial distribution)** といい, 特に, ある $j \in S$ に対し, $P(X_0 = j) = 1$ のとき確率 P を P_j で表し, (X_n, P_j) を j を出発するマルコフ連鎖という. (これは $P(X_0 = j) > 0$ のとき, $P_j(\cdot) := P(\cdot \mid X_0 = j)$ で定義するというのと同じことで, 実際に計算するときはこちらの方が都合が良い.)

$n \geq 0, j, k \in S$ に対し, $q_n(j,k) = P(X_n = k \mid X_0 = j)$ とおき, $Q_n = (q_n(j,k))$ を n **階推移確率 (行列) (n-step transition probability (matrix))**, 特に, Q_1 を $Q = (q(j,k))$ で表し, 単に, **推移確率 (行列)** という.

問 2.1 次を示せ.
(i) $q_n(j,k) \geq 0$, $\sum_k q_n(j,k) = 1$ $(j \in S)$,
(ii) $n \geq 1$, $j_0, j_1, \dots, j_n \in S$ に対して

$$P(X_0 = j_0, X_1 = j_1, \dots, X_n = j_n) = \mu_{j_0} q(j_0, j_1) \cdots q(j_{n-1}, j_n),$$

(iii) $m, n \geq 1$, $j_1, \dots, j_m, k_0, k_1, \dots, k_n \in S$ に対して

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = j_1, \dots, X_{n+m} = j_m \mid X_0 = k_0, X_1 = k_1, \dots, X_n = k_n) \\ = q(k_n, j_1) q(j_1, j_2) \cdots q(j_{m-1}, j_m). \end{aligned}$$

(iv) $Q_0 = I := (\delta_{jk})$ (単位行列), $Q_n = Q^n$ $(n \geq 1)$, 但し, $\delta_{jk} = 1$ $(j = k)$, $= 0$ $(j \neq k)$.

問 2.2 初期分布を $\mu = \{\mu_j\}$ とするとき X_n の分布が次で与えられることを示せ.

$$P(X_n = k) = \sum_{j \in S} \mu_j q_n(j,k).$$

今, $j \in S$ への**再帰時間 (recurrence time)**: T_j を次で定義する:

$$T_j = \inf\{n \geq 1; X_n = j\} \ (= \infty \quad \text{if } \{\cdot\} = \emptyset).$$

- j が**再帰的 (recurrent)** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $P_j(T_j < \infty) = 1$,
- j が**過渡的 (transient)** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $P_j(T_j < \infty) < 1$

と定義する.

全ての j が再帰的 (or 過渡的) なら (X_n) は再帰的 (or 過渡的) であるという.

マルコフ連鎖 $\{X_n\}$ あるいは推移確率 $Q = (q(j,k))$ が**既約 (irreducible)** であるとは任意の j,k に対し, ある $n \geq 1$ が存在し, $q_n(j,k) > 0$ をみたすときをいう. つまり, どこから出発しても何ステップかで, どこへでもいける可能性があるということである. (もう少し分りやすくいうと, トラップと通過するだけの点, 絶対に行けない点がないということである.)

次の事実が時間的一様なマルコフ連鎖に対する, 本節のメインの結果である:

定理 2.2 $j,k \in S$ とする.
(i) j が再帰的という条件は次のそれぞれと同値:
a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q_n(j,j) = \infty$.
b) $P_j(\{X_n\}$ は j に無限回戻る $) = 1$.
(ii) j が過渡的という条件は次のそれぞれと同値:
a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q_n(j,j) < \infty$.
b) $P_j(\{X_n\}$ は j に無限回戻る $) = 0$.
(iii) $\{X_n\}$ が既約なマルコフ連鎖なら, 再帰的か, 過渡的かのどちらかになる

まず (i), (ii) の b) について述べ, それから a) の判定定理, (iii) について証明を与える.

次の命題の証明で用いる問いを 2 つ挙げておく.

問 O-1 $m,n \geq 1$, $j_1,\dots,j_m,k_0,k_1,\dots,k_n \in S$ に対して

$$P(X_{n+1} = j_1,\dots,X_{n+m} = j_m \mid X_0 = k_0, X_1 = k_1,\dots,X_n = k_n)$$
$$= P(X_{n+1} = j_1,\dots,X_{n+m} = j_m \mid X_n = k_n).$$

問 O-2 事象列 $\{B_k\}_{k=1}^n$ が互いに素で, 事象 A,C に対し, $P(A \mid B_k) = P(A \mid C)$ $(1 \leq k \leq n)$ をみたしているとする. このとき $P(A \mid \bigcup B_k) = P(A \mid C)$ が成り立つことを示せ.

命題 2.1 (i) $j \in S$ が再帰的なら $P_j(\{X_n\}$ は j に無限回戻る $) = 1$.
(ii) $j \in S$ が過渡的なら $P_j(\{X_n\}$ は j に無限回戻る $) = 0$.

証明 直感的には理解できるであろう. 再帰的な場合は, 有限時間で戻る確率が 1 だから, 1 回目に戻ったときから考えれば, 再び有限時間で戻るからそれを繰り返せばよい. 過渡的な場合は戻る確率が 1 より小さいからそれを繰り返していけば, 確率は 0 に近づく.

m 回目に j に戻る時間を $T_j^{(m)}$ とおく.

$$T_j^{(1)} = T_j, \quad T_j^{(m)} = \min\{n > T_j^{(m-1)}; X_n = j\} \ (= \infty \quad \text{if } \{\cdot\} = \emptyset).$$

まず $P_j(T_j^{(m)} < \infty) = P_j(T_j < \infty)^m$ を示す. 自然数 s, t に対し, マルコフ性と時間的一様性を用いて,

$$P_j(T_j^{(m)} = s + t \mid T_j^{(m-1)} = s) = P_j(T_j = t)$$

が示せて (実際, [左辺]$= P(X_{s+t} = j, X_{s+u} \neq j \ (1 \leq u \leq t-1) \mid T_j^{(m-1)} = s)$ で, $\{X_u \neq j\} = \bigcup_{k_u \in S; k_u \neq j} \{X_u = k_u\}$ と $\{T_j^{(m-1)} = s\}$ が $\{X_1, \ldots, X_s (= j)\}$ の状態によって決まることに注意して, 上の 2 つの問 O-1, O-2 を用いれば良い.) これと $P(A \cap B) = P(B \mid A)P(A)$ より

$$P_j(T_j^{(m-1)} = s, T_j^{(m)} = s + t) = P_j(T_j^{(m-1)} = s) P_j(T_j = t)$$

をえる. よって

$$\begin{aligned} P_j(T_j^{(m)} < \infty) &= P_j(T_j^{(m-1)} < T_j^{(m)} < \infty) \\ &= \sum_{s=m-1}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} P_j(T_j^{(m-1)} = s, T_j^{(m)} = s + t) \\ &= P_j(T_j^{(m-1)} < \infty) P_j(T_j < \infty) \end{aligned}$$

より, $P_j(T_j^{(m)} < \infty) = P_j(T_j < \infty)^m$ が分かる. これより

$$\begin{aligned} P_j(\{X_n\} \text{ は } j \text{ に無限回戻る}) &= P_j(\bigcap_m \{T_j^{(m)} < \infty\}) \\ &= \lim_{m \to \infty} P_j(T_j^{(m)} < \infty) \\ &= \lim_{m \to \infty} P_j(T_j < \infty)^m. \end{aligned}$$

これは $P_j(T_j < \infty) = 1$ なら 1, そうでないなら 0 である. ■

再帰的, 過渡的の判定定理の証明のためにまずいくつか記号を定義する. $j, k \in S$ に対し, $f_m(j,k) := P_j(T_k = m)$ $(m \geq 1)$ とおき

$$Q_{jk}(s) := \sum_{n=0}^{\infty} q_n(j,k) s^n \quad (|s| < 1), \quad F_{jk}(s) := \sum_{m=1}^{\infty} f_m(j,k) s^m \quad (|s| \leq 1)$$

とおく. それぞれ $\{q_n(j,k)\}_{n \geq 0}$, $\{f_m(j,k)\}_{m \geq 1}$ の**母関数 (generating functions)** という. $\lim_{s \uparrow 1} Q_{jk}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(j,k)$ と $F_{jk}(1) = P_j(T_k < \infty)$ に注意せよ.

補題 2.1 $j, k \in S$ に対し, 次が成り立つ:

$$q_n(j,k) = \sum_{m=1}^{n} f_m(j,k) q_{n-m}(k,k) \ (n \geq 1), \quad Q_{jk}(s) = \delta_{jk} + F_{jk}(s) Q_{kk}(s) \quad (|s| < 1).$$

証明 $\{T_k = m\} = \{X_m = k, X_s \neq k \ (1 \leq s \leq m-1)\}$ に注意して

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{n} f_{j,k}^{(m)} q_{n-m}(k,k) &= \sum_{m=1}^{n} P_j(T_k = m) P_j(X_n = k \mid X_m = k) \\ &= \sum_{m=1}^{n} P_j(T_k = m) P_j(X_n = k \mid T_k = m) \\ &= \sum_{m=1}^{n} P_j(X_n = k, T_k = m) \\ &= P_j(X_n = k) \\ &= q_n(j,k). \end{aligned}$$

またこれを用いて (更に和の順序交換 $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty}$ も)

$$
\begin{aligned}
Q_{jk}(s) &= \delta_{jk}+\sum_{n=1}^{\infty}q_n(j,k)s^n \\
&= \delta_{jk}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}f_m(j,k)q_{n-m}(k,k)s^n \\
&= \delta_{jk}+F_{jk}(s)Q_{kk}(s).
\end{aligned}
$$

■

命題 2.2 $j\in S$ が再帰状態 $\iff \sum_{n=0}^{\infty}q_n(j,j)=\infty$.

証明 上の補題より $Q_{jj}(s)(1-F_{jj}(s))=1$ $(|s|<1)$ が成り立つから $F_{jj}(1)=P_j(T_j<\infty)$ と

$$
\lim_{s\uparrow 1}Q_{jj}(s)=\sum_{n=0}^{\infty}q_n(j,j)\le\infty
$$

に注意して $s\uparrow 1$ とすれば分かる. (形式的に次のように表せる:

$$
\sum_{n=0}^{\infty}q_n(j,j)(1-P_j(T_j<\infty))=1.
$$

これから $P_j(T_j<\infty)=1$ なら $\sum_{n=0}^{\infty}q_n(j,j)=\infty$, $P_j(T_j<\infty)<1$ なら $\sum_{n=0}^{\infty}q_n(j,j)<\infty$.) ■

問 2.3 上の証明を参考に $j\neq k$ のときを考えることにより

$$
j\in S \text{ 過渡的 } \Rightarrow \sum_{n=0}q_n(k,j)<\infty\ (^\forall k\in S)
$$

を示せ. (当然, この対偶: $[^\exists k\in S;\ \sum_{n=0}q_n(k,j)=\infty \ \Rightarrow\ j:$ 再帰的$]$ も成り立つ.)

($\sum_n q_n(k,j)=F_{kj}(1)\sum_n q_n(j,j)$ を用いる.)

補題 2.2 j が再帰的のとき $j\to k$ [i.e., $^\exists n;\ q_n(j,k)>0$] なら $P_k(T_j<\infty)=1$.

証明 まず, 任意の $i,j\in S$ に対して, 次が成り立つ.

$$
P_i(T_j<\infty)=q(i,j)+\sum_{k\in S;k\neq j}q(i,k)P_k(T_j<\infty).
$$

(実際, マルコフ性と時間的一様性より [後, $P_i(A\mid B)=P(A\mid B\cap\{X_0=i\})$ ($\to$ 確めよ.) も] $P_i(T_j=n\mid X_1=k)=P(T_j=n\mid X_0=i,X_1=k)=P(T_j=n\mid X_1=k)=P_k(T_j=n-1)$ で, これから $P_i(X_1=k,T_j=n)=q(i,k)P_k(T_j=n-1)$ をえて

$$
P_i(T_j<\infty)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k\in S}P_i(X_1=k,T_j=n)=P_i(X_1=j)+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k\neq j}P_i(X_1=k,T_j=n)
$$

に代入することにより分かる.)

今, 仮定の $q_n(j,k)>0$ より $^\exists(k_1,\dots,k_{n-1});\ q(j,k_1)q(k_1,k_2)q(k_2,k_3)\cdots q(k_{n-1},k)>0$ に注意し

て上で得た式で, $i=j$ とすると j の再帰性より, $^\forall k; q(j,k)>0$ に対し, $P_k(T_j<\infty)=1$ が分かる. $k=k_1$ として, 再び上の式で $i=k_1$ として, $k=k_2$ に対し, $q(k_1,k_2)>0$ より, $P_{k_2}(T_j<\infty)=1$ が分かる. これを繰り返して, 題意を得る. ■

問 2.4 前の問 2.3 と上の補題から次が成り立つことを示せ:

$$j \text{ 再帰的, かつ } j\to k \;\Rightarrow\; \sum_{n=0} q_n(k,j)=\infty.$$

$j,k\in S$ に対し $j\to k$ かつ $k\to j$ のとき $j\leftrightarrow k$ と表す.

命題 2.3 $j,k\in S; j\leftrightarrow k$ に対し, j が再帰的, 過渡的ならそれに応じて k もそうなる. 従って, 既約なマルコフ連鎖は再帰的, 過渡的のいずれかになる.

証明 仮定の $j\leftrightarrow k$ より, $^\exists \ell,m\ge 0; q_\ell(j,k)>0, q_m(k,j)>0$. また

$$q_{\ell+m+n}(j,j)\ge q_\ell(j,k)q_n(k,k)q_m(k,j)\quad (n\ge 0)$$

より

$$Q_{jj}(s)=\sum_{n=0}^\infty q_n(j,j)s^n\ge\sum_{n=0}^\infty q_{\ell+m+n}(j,j)s^{\ell+m+n}\ge s^{\ell+m}q_\ell(j,k)q_m(k,j)Q_{kk}(s).$$

これからもし j が過渡的なら

$$\lim_{s\uparrow 1}Q_{jj}(s)=\sum_{n=0}^\infty q_n(j,j)<\infty$$

で, 上の不等式から $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty q_n(k,k)<\infty$ をえて, k も過渡的となる. j,k を入れ替えても同じである. ■

注意 2.1 前の問 2.3, 2.4 で述べたことから既約なマルコフ連鎖に対しては

- 再帰的なら $^\forall j,k\in S$ に対し, $\sum_n q_n(j,k)=\infty$.
- 過渡的なら $^\forall j,k\in S$ に対し, $\sum_n q_n(j,k)<\infty$.

逆に, ある $j,k\in S$ に対し, $\sum_n q_n(j,k)$ が無限なら再帰的となり, 有限なら過渡的となる.

2.3 d 次元ランダムウォーク (d-dimensional random walks)

$S=\mathbf{Z}^d$ $(\ni j=(j_1,\dots,j_d))$ として, これを d 次元**格子 (lattice)** という. また $\{p_k\}_{k\in\mathbf{Z}^d}$ が $p_k\ge 0, \sum p_k=1$ をみたすとき $\mathbf{Z}^d$ 上の**分布 (distribution)** という.

定義 2.1 (X_n,P) が d **次元ランダムウォーク (d-dim. random walk)** とは, $\{p_k\}_{k\in\mathbf{Z}^d}$ を $\mathbf{Z}^d$ 上の分布として, $\{X_0,X_1-X_0,X_2-X_1,\dots\}$ が独立で, $P(X_n-X_{n-1}=k)=p_k$ $(n\ge 1, k\in\mathbf{Z}^d)$ をみたすときをいう (**1 歩の分布** $\{p_k\}$ **をもつランダムウォーク**ともいう). 特に $|k|=1$ なる $k\in\mathbf{Z}^d$ に対し, $p_k=1/(2d)$ のとき**単純ランダムウォーク (simple random walk)** という. ここで $k=(k_1,\dots,k_d)$, $|k|=\sqrt{k_1^2+\cdots+k_d^2}$.

さらに $P_j(X_1=k_1,\dots,X_n=k_n):=P(X_1=k_1,\dots,X_n=k_n\mid X_0=j)$ で P_j を定義して (X_n,P_j) を j を出発する d 次元ランダムウォークという.

注意 2.2 条件付確率 $P(A \mid B) := P(A \cap B)/P(B)$ は $P(B) > 0$ のとき定義されるので上の条件はそれも仮定に含まれているとみなす.

問 事象 $A, B \in \mathcal{F}$ が独立 $\iff$ $P(A \mid B) = P(A)$ を示せ.

明かに, d 次元ランダムウォークはマルコフ連鎖である. しかもその推移確率 $Q = (q(j,k))$ は $q(j,k) = p_{k-j}$ で与えれる. また単純ランダムウォークは既約である.

問 2.5 このことを確かめよ. [マルコフ性, 時間的一様性, 推移確率, 既約性]

問 2.5 改 (X_n, P) を d 次元ランダムウォークとする.

(1) $X_{n+1} - X_n$ と $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ が独立であることを示せ, i.e.,

$$\begin{aligned} & P(X_{n+1} - X_n = j, X_0 = k_0, X_1 = k_1, \ldots, X_n = k_n) \\ = \quad & P(X_{n+1} - X_n = j) P(X_0 = k_0, X_1 = k_1, \ldots, X_n = k_n). \end{aligned}$$

特に $k_0, k_1, \ldots, k_{n-1} \in \mathbf{Z}^d$ で和をとることにより, $X_{n+1} - X_n$ と X_n が独立であることも分る.

(2) $P(X_{n+1} = j \mid X_0 = k_0, X_1 = k_1, \ldots, X_n = k_n) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = k_n) = p_{j-k_n}$ を示せ. これから $\{X_n\}$ が時間的一様なマルコフ連鎖で, $q(j,k) = p_{k-j}$ も分る.

(3) 単純ランダムウォークは既約的であることを示せ. ($\|j - k\| := |j_1 - k_1| + \cdots + |j_d - k_d|$ を用いて $j \neq k, j = k$ で分けて考える.)

従って, この $Q = (q(j,k)) = (p_{k-j})$ を用いて, 再帰性, 過渡性について議論することができる.

まず、前節の結果を用いることにより, 単純ランダムウォークに関しては次のことが比較的容易に分る:

定理 2.3 d 次元単純ランダムウォークは

(1) $d = 1, 2$ なら再帰的 (i.e., $P_j(T_j < \infty)$) であり,

(2) $d \geq 3$ なら過渡的である.

ここでは 3 次元以下について示す.

まず既約性により再帰的か過渡的のいずれかに分れるから, $q_n(0,0)$ の n についての和の収束・発散を調べればよい. 奇数歩で出発点に戻ってくることは無いから, $q_{2n+1}(0,0) = 0$ で, 偶数歩の $q_{2n}(0,0)$ について考えればよい. そこで次を示す. (これにより再帰的か過渡的かは前節の定理 2.2 により判定できる.)

命題 2.4 d 次元単純ランダムウォークの推移確率 $Q = (q(j,k))$ に対して

(1) $d = 1, 2$ のとき $n \to \infty$ なら

$$q_{2n}(0,0) \sim \begin{cases} 1/\sqrt{\pi n} & (d = 1) \\ 1/(\pi n) & (d = 2) \end{cases}$$

ここで $a_n \sim b_n$ $(n \to \infty)$ $\overset{\text{def}}{\iff}$ $a_n/b_n \to 1$ $(n \to \infty)$ である.

(2) $d=3$ なら適当な正の数 C に対して

$$q_{2n}(0,0) \le Cn^{-3/2}.$$

問 2.6 一般に正の値をとる数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 対して, $a_n \sim b_n$ $(n \to \infty)$ なら $^{\exists}c_1, c_2 > 0; c_1 b_n \le a_n \le c_2 b_n$ $(^{\forall}n \ge 1)$ が成り立つこと示せ.

注意 2.3 実は, 一般に, 次の事実が知られている: ($d=3$ なら定数は $\sqrt{(3/\pi)^3}/4$)

$$q_{2n}(0,0) \sim 2^{1-d} d^{d/2} (\pi n)^{-d/2} \quad (n \to \infty).$$

命題の証明で使う公式を述べておく.

[スターリングの公式 (Stirling's formula)] $n! \sim \sqrt{2\pi} n^{n+1/2} e^{-n} \quad (n \to \infty)$.

命題 2.4 の証明

$d=1$ のときは次のことが容易に分るので, スターリングの公式より明らか:

$$q_{2n}(0,0) = \binom{2n}{n} 2^{-2n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \quad (n \to \infty).$$

$d=2$ のときは

$$q_{2n}(0,0) = \sum_{j,k \ge 0; j+k=n} \frac{(2n)!}{(j!k!)^2} 4^{-2n} = \binom{2n}{n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{k}^2 4^{-2n}$$

で, さらに $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ を用いれば 1 次元の結果から分る.

$d=3$ のときは

$$q_{2n}(0,0) = \sum_{j,k,m \ge 0; j+k+m=n} \frac{(2n)!}{(j!k!m!)^2} 6^{-2n}$$

で, 3 項展開公式より

$$q_{2n}(0,0) \le c_n \frac{(2n)!}{n!} 3^n 6^{-2n}$$

をえる. ここで $c_n = \max_{j,k,m \ge 0; j+k+m=n} (j!k!m!)^{-1}$ である. さらにこの c_n に対し, 次が成り立つことから, 再びスターリングの公式を用いれば題意をえる.

(2.1) $$c_n \le c 3^{n+3/2} n^{-n-3/2} e^n \quad (c > 0 \text{ は } n \ge 1 \text{ に無関係な定数}).$$

実際, n を 3 で割っていくつ余るかで場合分けして

(2.2) $$c_n \le \begin{cases} (m!)^{-3} & (n = 3m) \\ (m!)^{-2}((m+1)!)^{-1} & (n = 3m+1) \\ (m!)^{-1}((m+1)!)^{-2} & (n = 3m+2) \end{cases}$$

が分るので, スターリングの公式より, ある定数 $c_1, c_2 > 0$ が存在して

$$c_1 n^{n+1/2} e^{-n} \le n! \le c_2 n^{n+1/2} e^{-n}$$

をみたすので上に代入すればよい. ■

問 2.7 1 次元と 2 次元のときにスターリングの公式を用いて計算せよ.

問 2.8 上の式 (2.2) を示し, それを用いて (2.1) を導き, $d=3$ の証明 (計算) を確かめよ.

2.4 ゴルトン-ワトソン過程 (Galton-Watson processes)

Galton-Watson 過程とは, 前の例で述べたように家系の存続モデルである. 第 n 世代の男子の数を $Z_n \in \mathbf{Z}_+ = \{0,1,2,\dots\}$ で表す. 一般に対象を粒子と呼ぶことにして, $Z_0 = 1$ とする. 各粒子は独立に次世代に Y 個の粒子を生じさせるとする. ここで Y は $\mathbf{Z}_+$ に値をとる確率変数で分布 $(p_k)_{k\ge 0}$ をもつとする, i.e., $P(Y=k)=p_k$ $(k\ge 0)$ 明らかに $\{Z_n\}$ はマルコフ過程となり, 推移確率は次で与えられる:

$$p(i,j) = P(Z_{n+1}=j \mid Z_n = i) = P(\sum_{k=1}^{i} Y_k = j) \quad (i\ge 1, j\ge 0).$$

ここで $\{Y_k\}$ は分布 (p_k) に従う独立な確率変数列である. また一旦 $Z_n=0$ となれば, そこで家系は失われるから

$$p(0,i)=0\ (i\ge 1), \quad p(0,0)=1$$

をみたす. 我々は子孫の分布 (p_k) に対し, その平均が存在することを仮定する.

$$m := \sum_{k=1}^{\infty} k p_k \in (0,\infty).$$

今, q を 1 粒子から出発した GW 過程が消滅する確率とすると,

$$\begin{aligned} q &= P(\text{消滅} \mid Z_0=1) = P({}^{\exists} n\ge 1; Z_n = 0 \mid Z_0 = 1) \\ &= \sum_{k\ge 0} P(\text{消滅} \mid Y=k) P(Y=k) = \sum_{k\ge 0} q^k p_k. \end{aligned}$$

を得る. このとき $q=1$ は常にこの方程式の解となるが, $q\in[0,1)$ となるための条件は何であろうか? この問に答えるために次の母関数を導入する.

$$f(s) = E[s^Y] = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k \quad (|s|\le 1).$$

この級数は $|s|\le 1$ で絶対収束し, 従って $|s|<1$ で無限回項別微分可能である. また

$$f(0)=p_0, \quad f(1)=1, \quad f'(1)=\sum_{k\ge 1} k p_k = m.$$

定理 2.4 GW 過程 $\{Z_n\}$ は次をみたす:

$$\begin{aligned} m<1 \text{ or } m=1, p_0>0 &\implies P({}^{\forall} n\ge 1, Z_n \ge 1 \mid Z_0=1) = 0, \quad \text{i.e., } q=1 \\ m>1 &\implies P({}^{\forall} n\ge 1, Z_n \ge 1 \mid Z_0=1) > 0, \quad \text{i.e., } q<1 \end{aligned}$$

ここで消滅確率 q は $m>1$ のとき方程式 $f(s)=s$ の $[0,1)$ での一意解として与えられる.

注意 2.4 (i) $p_0 = 0$ なら確実に子孫を残すので消滅確率 $q = 0$ (このとき $m \geq 1$). 特に $p_1 = 1$ なら $m = 1$ だが $q = 0$.

(ii) $m = 1$ のとき, $p_0 > 0$ なら $p_0 + p_1 < 1$ となる. 実際, もし $p_0 + p_1 = 1$ とすると $m < 1$ となり矛盾する.

(iii) $m > 1$ なら $p_0 + p_1 < 1$ ($p_0 + p_1 = 1$ なら $m \leq 1$ より明らか).

以下, 簡単のため $P_1(\cdot) = P(\cdot \mid Z_0 = 1)$ と表すことにする. またその平均も E_1 で表す. まずいくつか必要な命題を証明する. 母関数 f から, $f_1 = f$, $f_{n+1} = f \circ f_n$ $(n \geq 1)$ と定義する.

命題 2.5 $n \geq 1$ に対し, $Z_0 = 1$ の条件のもと, Z_n の母関数は f_n となる, i.e., $E_1[s^{Z_n}] = f_n(s)$.

証明 $g_n(s) = E_1[s^{Z_n}] = \sum_{k=0}^{\infty} s^k P_1(Z_n = k)$ とおく. $n = 1$ のとき $\{Z_0 = 1\}$ のもと Z_1 と Y は同分布なので, 明らかに $g_1(s) = E[s^Y] = f(s)$. $n \geq 1$ に対し, $g_n = f_n$ と仮定する. $\{Z_n = k\}$ のもと Z_{n+1} の分布は $\sum_{i=1}^{k} Y_i$ と同じで, $\{Y_i\}$ は独立で Y と同分布であることから

$$E[s^{Z_{n+1}} \mid Z_n = k] = E[\prod_{i=1}^{k} s^{Y_i} \mid Z_n = k] = \prod_{i=1}^{k} E[s^{Y_i}] = f(s)^k.$$

よって

$$g_{n+1}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} E[s^{Z_{n+1}} \mid Z_n = k] P_1(Z_n = k) = \sum_{k=0}^{\infty} f(s)^k P_1(Z_n = k) = g_n(f(s)).$$

帰納法の仮定より, $g_{n+1}(s) = g_n(f(s)) = f_n(f(s)) = f_{n+1}(s)$. ■

命題 2.6 $E_1[Z_n] = m^n$ $(n \geq 0)$.

証明 $m = E[Y] = E_1[Z_1]$ と $E[Z_n \mid Z_{n-1} = k] = E[\sum_{i=1}^{k} Y_i] = km$ に注意して,

$$E_1[Z_n] = \sum_{k \geq 1} E[Z_n \mid Z_{n-1} = k] P_1(Z_{n-1} = k) = \sum_{k \geq 1} km P_1(Z_{n-1} = k) = m E_1[Z_{n-1}].$$

これを繰り返して $E_1[Z_n] = m^{k-1} E_1[Z_1] = m^k$ をえる. ■

[定理 2.4 の証明]

P_1 のもと Z_n の母関数が f_n であったことから, $P_1(Z_n = 0) = f_n(0)$ が成り立つ. $\{Z_n = 0\} \uparrow$ に注意すれば,

$$q = P_1(^{\exists} n \geq 1; Z_n = 0) = P_1(\bigcup_{n \geq 1} \{Z_n = 0\}) = \lim_{n \to \infty} f_n(0).$$

ここで $f_{n+1}(0) = f(f_n(0))$ より, $n \to \infty$ とすれば, f の連続性から, $q = f(q)$ をみたす.

($m < 1$ の場合) $P_1(Z_n \geq 1) \leq E_1[Z_n] = m^n$ より, $\{Z_n \geq 1\} \downarrow$ に注意して,

$$0 = \lim_{n \to \infty} P_1(Z_n \geq 1) = P_1(\bigcap_{n \geq 1} \{Z_n \geq 1\}) = P_1(^{\forall} n \geq 1, Z_n \geq 1) \quad \text{i.e., } q = 1.$$

($m = 1$ の場合) 定理の後の注意 2.4 (ii) で述べたように $p_0 > 0$ なら $p_0 + p_1 < 1$ より, $^{\exists} k \geq 2; p_k > 0$ に注意して,

$$f'(s) = \sum_{k \geq 1} k p_k s^{k-1} < f'(1) = \sum_{k \geq 1} k p_k = m = 1 \quad (0 < s < 1).$$

平均値の定理から $s \in (0,1)$ に対し, ${}^{\exists}c \in (s,1); f(1) - f(s) = f'(c)(1-s) < 1-s$. $f(1) = 1$ より, 結局, $f(s) > s$ $(0 < s < 1)$ をえる. さらに $f(0) = p_0 > 0$ なので, $f(s) = s$ をみたす解は $[0,1]$ では $s = 1$ のみとなる. 故に $q = 1$.

($m > 1$ の場合) $p_0 + p_1 < 1$ に注意する (注意 2.4 (iii)). $f'(1) = m > 1$ で f' の連続性から

$$^{\exists}\eta > 0; 1 - \eta < {}^{\forall}s < 1, 1 < f'(s) < f'(1) = m$$

(ここでは最後の不等式までは必要としないが, 理由は上と同様である). 従って $1 - \eta < s < 1$ なら $f(s) < s$. また $f(0) = p_0 \geq 0$ なので, $g(s) = f(s) - s$ に対し中間値の定理を用いることにより, ${}^{\exists}s_1 \in [0,1); f(s_1) = s_1$. この解の一意性を示す. もし ${}^{\exists}s_2 \in [0,1); s_1 < s_2, f(s_2) = s_2$ とすると, $g(s_i) = 0$ で, また $f(1) = 1$ より, $g(1) = 0$. ロルの定理より, $0 \leq s_1 < {}^{\exists}\xi_1 < s_2 < {}^{\exists}\xi_2 < 1; g'(\xi_1) = g'(\xi_2) = 0$, i.e., $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 1$. 一方, $p_0 + p_1 < 1$ より,

$$s \in (0,1) \quad \Longrightarrow \quad f''(s) = \sum_{k \geq 2} k(k-1)p_k s^{k-2} > 0.$$

これから $f'(s)$ は $s \in (0,1)$ で狭義単調増加となるが, 上の $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 1$ に矛盾する. 故に $f(s) = s$ の解は $q = s_1$ or $q = 1$ のみとなる. さらに $q = 1$ とすると $1 = q = \lim_{n \to \infty} f_n(0)$ より, $n \gg 1$ (十分大) なら, $f_n(0) > 1 - \eta$. 上で示したことから $f_{n+1}(0) = f(f_n(0)) < f_n(0)$ となり, f_n が (n に関して) 単調増加であることに反する. よって $q = s_1 \in [0,1)$. ■

例 2.3 $p_0 = p_2 = 1/2$ のとき, 即ち, ある家系で, 男子を 2 人生むか, 生んでも女性ばかりという確率が半々のとき, 平均は $m = 1$ だが, この家系はいつかは絶滅してしまう.

例 2.4 Lotka (1939) はアメリカの男性の子孫の分布が幾何分布であることを見い出した.

$$P(Y = 0) = \frac{1}{2}, \quad P(Y = k) = \frac{1}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{k-1} \ (k \geq 1).$$

このとき

$$m = \frac{1}{5}\sum_{k \geq 1} k \left(\frac{3}{5}\right)^{k-1} = \frac{5}{4} > 1.$$

を得て, 消滅確率 q は

$$s = f(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\sum_{k \geq 1}\left(\frac{3}{5}\right)^{k-1} s^k, \quad 即ち, \quad \frac{3}{5}s^2 - \frac{11}{10}s + \frac{1}{2} = 0$$

の解で 1 より真に小さい正の数となる. これを解くと $s = 5/6, 1$ となり, $q = 5/6$ を得る. 従ってある家系が存続する確率は $1/6$ となる.

問 2.9 上の例で, 平均 $m = 5/4$ と方程式 $s = f(s)$ の解 $s = 5/6, 1$ を導く計算を確かめよ.

3 連続時間マルコフ連鎖 (Continuous-time Markov Chain)

$t \geq 0$ を連続時間を表すパラメータとして, 可算集合 S に値をとる確率変数の族 (**確率過程**) $(X_t)_{t\geq 0}$ が連続時間マルコフ連鎖であるとは, 次のマルコフ性をもつときをいう.

$s, t \geq 0$, $i, j, k_{u_\ell} \in S, 0 \leq u_\ell < s$ $(\ell \leq \ell_0)$ に対し,

$$P(X_{t+s} = j \mid X_s = i, X_{u_\ell} = k_{u_\ell}\ (\ell \leq \ell_0)) = P(X_{t+s} = j \mid X_s = i).$$

さらに簡単のため, 次の時間的一様性も仮定しておく.

$$P(X_{t+s} = j \mid X_s = i) = P(X_t = j \mid X_0 = i).$$

これを推移確率 $q_t(i,j) = P(X_t = j \mid X_0 = i)$ として定義し, 後で述べるように離散時間のときと同様な性質をみたすこともいえる.

3.1 指数時間 (Exponential times)

離散時間のマルコフ連鎖から, 連続時間のマルコフ連鎖を構成するために, ジャンプ間隔をランダムにするということが考えられる. そのために指数時間 (= 指数分布に従うランダムな時間) を導入する.

定義 3.1 定数 $\alpha > 0$ に対し, 確率変数 $T = T(\omega)$ が**パラメータ α の指数分布に従う** とは

$$P(T > t) = \int_t^\infty \alpha e^{-\alpha s} ds = e^{-\alpha t}$$

をみたすときをいう. 即ち T が密度関数 $f(s) = \alpha e^{-\alpha s}$ の分布をもつということである. 本講義では T を単に **α-指数時間** or **指数時間 (exponential time)** と呼ぶことにする.

このとき平均と分散は容易に計算でき, 次のようになる.

$$E[T] = \int_0^\infty \alpha s e^{-\alpha s} ds = \frac{1}{\alpha}, \quad V(T) = E[T^2] - (E[T])^2 = \frac{1}{\alpha^2}.$$

問 3.1 上の分散の計算を確かめよ.

命題 3.1 T が指数時間なら, 次の**無記憶性 (memoryless property)** をもつ.
$t, s \geq 0$ に対し,

$$P(T > t + s \mid T > s) = P(T > t).$$

証明

$$P(T > t + s \mid T > s) = \frac{P(T > t + s)}{P(T > s)} = \frac{e^{-(t+s)}}{e^{-s}} = e^{-t} = P(T > t).$$

■

命題 3.2 $T_1, T_2, \ldots T_n$ が独立で, それぞれ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ の指数時間なら,
$\min\{T_1, T_2, \ldots T_n\}$ は $(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)$-指数時間となる. さらに

$$P(\min\{T_1, T_2, \ldots T_n\} = T_k) = \frac{\alpha_k}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}.$$

証明 簡単のため $n=2, k=1$ のときに示す.

$$P(\min\{T_1,T_2\}>t) = P(T_1>t, T_2>t) = P(T_1>t)P(T_2>t) = e^{-(\alpha_1+\alpha_2)t}.$$

また T_1, T_2 の結合分布が, 独立性から, それぞれの分布の積となることから

$$\begin{aligned} P(\min\{T_1,T_2\}=T_1) &= P(T_1<T_2) \\ &= \int_0^\infty ds\alpha_1 e^{-\alpha_1 s}P(s<T_2) \\ &= \int_0^\infty ds\alpha_1 e^{-\alpha_1 s}e^{-\alpha_2 s} \\ &= \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}. \end{aligned}$$

一般のときも同様である. ■

例 3.1 A と B の二つの装置からなるシステムがあり, A が故障するまでの時間が 1-指数時間で, B が故障するまでの時間が 2-指数時間であるという. これらは独立に故障し, 一つでも故障すれば, システム全体が故障するとする. このときシステムが故障するまでの時間の平均値を求めよ.

前の命題からシステムが故障するまでの時間は 3-指数時間となるので, その平均は 1/3 となる.

3.2 ポアッソン過程 (Poisson processes)

連続時間マルコフ連鎖として, 最も単純な例であるポアッソン過程について述べる.

定義 3.2 $\lambda>0$ に対し, 確率過程 $(X_t)_{t\geq 0}$ が**パラメータ λ のポアッソン過程**であるとは以下をみたすときをいう (単に **λ-ポアッソン過程**ともいう).

(1) $X_0=0$,

(2) $0\leq s<t$ なら X_t-X_s はパラメータ $\lambda(t-s)$ のポアッソン分布に従う. 即ち,

$$P(X_t-X_s=k) = e^{-\lambda(t-s)}\frac{\lambda^k(t-s)^k}{k!} \quad (k=0,1,2,\ldots).$$

(3) X_t は独立増分をもつ.

即ち, $0<t_1<t_2<\cdots<t_n$ に対し, $X_{t_1}, X_{t_2}-X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}-X_{t_{n-1}}$ は独立.

定理 3.1 ポアッソン過程は連続時間マルコフ連鎖である.

上の独立増分性から容易に分かる.

問 3.2 一般に可算線形空間 S に値をとる 0 を出発する連続時間確率過程が, 独立増分性をもてば, 連続時間マルコフ連鎖となることを示せ.

解 X_t を仮定をみたす確率過程とする. $0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t_{n+1}$ に対し, $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_{n+1}} - X_{t_n}$ の独立性を用いて, 離散時間のときと同様に, $X_{t_{n+1}} - X_{t_n}$ と $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ の独立性, $X_{t_{n+1}} - X_{t_n}$ と X_{t_n} の独立性が示せる. これから マルコフ性をえる.

$$\begin{aligned} P(X_{t_{n+1}} = j_{n+1} \mid X_{t_k} = j_k, 0 \le k \le n) &= P(X_{t_{n+1}} - X_{t_n} = j_{n+1} - j_n \mid X_{t_k} = j_k, 0 \le k \le n) \\ &= P(X_{t_{n+1}} - X_{t_n} = j_{n+1} - j_n) \\ &= P(X_{t_{n+1}} - X_{t_n} = j_{n+1} - j_n \mid X_{t_n} = j_n) \\ &= P(X_{t_{n+1}} = j_{n+1} \mid X_{t_n} = j_n). \end{aligned}$$

■

定理 3.2 (ポアッソン過程の構成) $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ を独立同分布な確率変数で, それぞれ λ-指数時間であるとする. $\tau_n = \sum_{k=1}^n \sigma_k$, $\tau_0 = 0$ とおき,

$$X_t = n \iff \tau_n \le t < \tau_{n+1} \quad \text{即ち}, \quad X_t := \sum_{n=0}^{\infty} n 1_{[\tau_n, \tau_{n+1})}(t) = \max\{n; \tau_n \le t\},$$

と定義するとこれは λ-ポアッソン過程となる.

注 上の定理の逆も言える. 即ち, $(X_t)_{t \ge 0}$ を λ-ポアッソン過程とし, そのジャンプ時刻を $\tau_1, \tau_2, \ldots$ とする. このとき $\tau_1, \tau_2 - \tau_1, \tau_3 - \tau_2, \ldots$ は独立同分布で, それぞれ λ-指数時間となる.

証明の前に必要な事柄を述べておく.

命題 3.3 独立な n 個の λ-指数時間 σ_k の和 $\tau = \sum_{k=1}^n \sigma_k$ はガンマ分布 $\Gamma(n, \lambda)$ に従う, i.e.,

$$P(\tau < t) = \int_0^t \frac{1}{(n-1)!} \lambda^n s^{n-1} e^{-\lambda s} ds.$$

証明 (σ_n) の独立性により,

$$P(\sigma_1 + \cdots + \sigma_n < t) = \int_{s_1 + \cdots s_n < t} \lambda^n e^{-\lambda(s_1 + \cdots s_n)} ds_1 \cdots ds_n$$

$u_k = s_1 + \cdots s_k$ $(k = 1, \ldots, n)$, 特に $s = u_n$ として変数変換すれば,

$$\begin{aligned} \int_{s_1 + \cdots s_n < t} \lambda^n e^{-\lambda(s_1 + \cdots s_n)} ds_1 \cdots ds_n &= \int_0^t du_n \int_0^{u_n} du_{n-1} \cdots \int_0^{u_2} du_1 \lambda^n e^{-\lambda u_n} \\ &= \int_0^t du_n \int_0^{u_n} du_{n-1} \cdots \int_0^{u_3} du_2 u_2 \ \lambda^n e^{-\lambda u_n} \\ &= \int_0^t du_n \frac{1}{(n-1)!} u_n^{n-1} \lambda^n e^{-\lambda u_n} \\ &= \int_0^t ds \frac{1}{(n-1)!} \lambda^n s^{n-1} e^{-\lambda s} \end{aligned}$$

■

定理 3.2 の証明　まず τ_n は σ_{n+1} と独立で $\Gamma(n,\lambda)$ 分布に従うことから

$$\begin{aligned}
P(X_t = n) &= P(\tau_n \le t < \tau_{n+1} = \tau_n + \sigma_{n+1}) \\
&= \int_0^t ds\, \frac{1}{(n-1)!}\lambda^n s^{n-1} e^{-\lambda s} P(t < s + \sigma_{n+1}) \\
&= \int_0^t ds\, \frac{1}{(n-1)!}\lambda^n s^{n-1} e^{-\lambda s} e^{-(t-s)\lambda} \\
&= e^{-\lambda t}\frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_0^t s^{n-1} ds = e^{-\lambda t}\frac{\lambda^n t^n}{n!}.
\end{aligned}$$

次に同様な計算で

$$\begin{aligned}
P(\tau_{n+1} > t+s, X_t = n) &= P(\tau_{n+1} > t+s, \tau_n \le t < \tau_{n+1}) \\
&= P(\tau_n + \sigma_{n+1} > t+s, \tau_n \le t) \\
&= \int_0^t du\, \frac{1}{(n-1)!}\lambda^n u^{n-1} e^{-\lambda u} P(u + \sigma_{n+1} > t+s) \\
&= \int_0^t du\, \frac{1}{(n-1)!}\lambda^n u^{n-1} e^{-\lambda u} e^{-\lambda(t+s-u)} = e^{-\lambda(t+s)}\frac{\lambda^n t^n}{n!}
\end{aligned}$$

これから

$$P(\tau_{n+1} > t+s \mid X_t = n) = e^{-\lambda s} = P(\tau_1 > s). \tag{3.1}$$

さらに一般に $m \ge 1$ に対し, 次も示せる.

$$P(\tau_{n+m} > t+s \mid X_t = n) = P(\tau_m > s).$$

上で m を $m+1$ に変えたものから m のときのを引けば,

$$P(\tau_{n+m} \le t+s < \tau_{n+m+1} \mid X_t = n) = P(\tau_m \le s < \tau_{m+1}) = P(X_s = m).$$

これを用いて, $n \ge 0, m \ge 1$ に対し,

$$\begin{aligned}
P(X_t = n, X_{t+s} - X_t = m) &= P(X_t = n, X_{t+s} = n+m) \\
&= P(X_t = n)P(X_{t+s} = n+m \mid X_t = n) \\
&= P(X_t = n)P(\tau_{n+m} \le t+s < \tau_{n+m+1} \mid X_t = n) \\
&= P(X_t = n)P(X_s = m)
\end{aligned}$$

これを $n \ge 0$ について加えることにより,

$$P(X_{t+s} - X_t = m) = P(X_s = m) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^m s^m}{m!}.$$

$m = 0$ のときは $P(X_{t+s} - X_t = m) = e^{-\lambda s}$ を得るので, 上に含まれる. 実際,

$$P(\tau_n > t+s \mid X_t = n) = P(\tau_n > t+s \mid \tau_n \le t < \tau_{n+1}) = 0$$

より, 上の式 (3.1) から引くと,

$$P(X_{t+s} = n \mid X_t = n) = P(\tau_n \le t+s < \tau_{n+1} \mid X_t = n) = e^{-\lambda s}.$$

従って,

$$
\begin{aligned}
P(X_t = n, X_{t+s} - X_t = 0) &= P(X_t = n, X_{t+s} = n) \\
&= P(X_t = n)P(X_{t+s} = n \mid X_t = n) \\
&= P(X_t = n)e^{-\lambda s}.
\end{aligned}
$$

これを $n \geq 0$ について加えれば $P(X_{t+s} - X_t = 0) = e^{-\lambda s}$. また上と同様な計算で, $0 \leq t_1 < \cdots < t_k$ に対し,

$$
\begin{aligned}
&P(X_{t_0} = n_0, X_{t_1} - X_{t_0} = n_1, \ldots, X_{t_k} - X_{t_{k-1}} = n_k) \\
&\quad = P(X_{t_0} = n_0, X_{t_1} = N_0 + n_1, \ldots, X_{t_k} = n_0 + \cdots + n_k) \\
&\quad = P(X_{t_0} = n_0)P(X_{t_1 - t_0} = n_1, \ldots, X_{t_k - t_0} = n_1 + \cdots + n_k)
\end{aligned}
$$

これを繰り返して, 独立増分性をえる.

$$
\begin{aligned}
&P(X_{t_0} = n_0, X_{t_1} - X_{t_0} = n_1, \ldots, X_{t_k} - X_{t_{k-1}} = n_k) \\
&\quad = P(X_{t_0} = n_0)P(X_{t_1 - t_0} = n_1) \cdots P(X_{t_k - t_{k-1}} = n_k) \\
&\quad = P(X_{t_0} = n_0)P(X_{t_1} - X_{t_0} = n_1) \cdots P(X_{t_k} - X_{t_{k-1}} = n_k)
\end{aligned}
$$

■

例 3.2 消防署にかかってくる電話の回数は 1 時間あたり 20 回の割合のポアッソン過程に従い, そのうち 20 %だけが緊急を要するものであるという. このとき, この緊急を要するものだけの回数を数える確率過程を考えると, これもポアッソン過程となるだろうか？もしそうなら, そのパラメータはいくつか？

答えは次の命題から容易に分かるが, 1 時間あたり 4 回の割合のポアッソン過程となる.

命題 3.4 X_t を λ-ポアッソン過程とする. この X_t のジャンプにタイプ I とタイプ II の 2 種類の異なるジャンプがあるとして, それぞれ独立に確率 p と $1-p$ で現れるとする. (ジャンプの大きさは全て 1 で同じであるが, 例えばグラフで考えて, ジャンプに赤と青の色が付いていて, それぞれの色のジャンプの現れる確率がそうなっていると考える.) このときタイプ I のジャンプのみからなる確率過程を Y_t, タイプ II のジャンプのみからなる確率過程を Z_t とするとそれぞれパラメータ λp, $\lambda(1-p)$ の独立なポアッソン過程となる.

証明 $X_t = Y_t + Z_t$ に注意して, $X_t = n + k$ の条件のもと, $Y_t = k$ は $n + k$ 回中, k 回のジャンプが確率 p で選び出されることになるので

$$
P(Y_t = k, Z_t = n \mid X_t = n + k) = P(Y_t = k \mid X_t = n + k) = \binom{n+k}{k} p^k (1-p)^n.
$$

これから

$$
\begin{aligned}
P(Y_t = k, Z_t = n) &= P(Y_t = k, Z_t = n \mid X_t = n + k)P(X_t = n + k) \\
&= \binom{n+k}{k} p^k (1-p)^n e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n+k}}{(n+k)!} \\
&= e^{-\lambda p t} \frac{(\lambda p t)^k}{k!} e^{-\lambda(1-p)t} \frac{(\lambda(1-p)t)^n}{n!}.
\end{aligned}
$$

問 3.3 最後の等号を確かめよ.

これの両辺を $n \geq 0$ で和をとると

$$P(Y_t = k) = e^{-\lambda pt}\frac{(\lambda pt)^k}{k!}.$$

同様に $k \geq 0$ で和をとると

$$P(Z_t = n) = e^{-\lambda(1-p)t}\frac{(\lambda(1-p)t)^n}{n!}.$$

さらに上の 3 式を合わせて

$$P(Y_t = k, Z_t = n) = P(Y_t = k)P(Z_t = n).$$

以上から Y_t, Z_t は独立で, それぞれ $\lambda p, \lambda(1-p)$ ポアッソン分布に従う. 次に $Y_t - Y_s$ に対しても, 上と同様な計算で,

$$\begin{aligned} P(Y_{t+s} - Y_s = k) &= \sum_{n\geq 0} P(Y_{t+s} - Y_s = k \mid X_{t+s} - X_s = n+k)P(X_{t+s} - X_s = n+k) \\ &= \sum_{n\geq 0}\binom{n+k}{k}p^k(1-p)^n e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n+k}}{(n+k)!} \\ &= e^{-\lambda pt}\frac{(\lambda pt)^k}{k!}. \end{aligned}$$

従って $P(Y_{t+s} - Y_s = k) = P(Y_t = k)$. さらに全く同様な計算で,

$$\begin{aligned} \text{(3.2)}\qquad & P(Y_s = k_1, Y_{t+s} - Y_s = k_2, Z_s = n_1, Z_{t+s} - Z_s = n_2) \\ &= P(Y_s = k_1)P(Y_{t+s} - Y_s = k_2)P(Z_s = n_1)P(Z_{t+s} - Z_s = n_2) \end{aligned}$$

が示せて, ($\{X_s = k_1 + n_1, X_{t+s} - X_s = k_2 + n_2\}$ で条件をつけて, これらの独立性も用いる) これから一般に $(Y_t), (Z_t)$ それぞれの独立増分性が分かり, (Y_t) は λp-ポアッソン過程, (Z_t) は $\lambda(1-p)$-ポアッソン過程となる. さらに上式から,

$$\begin{aligned} \text{(3.3)}\qquad & P(Y_s = k_1, Y_{t+s} = k_1 + k_2, Z_s = n_1, Z_{t+s} = n_1 + n_2) \\ &= P(Y_s = k_1, Y_{t+s} = k_1 + k_2)P(Z_s = n_1, Z_{t+s} = n_1 + n_2) \end{aligned}$$

が容易に導かれるので $\{Y_s, Y_{s+t}\}$ と $\{Z_s, Z_{s+t}\}$ は独立で, より一般に $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_m$ に対し, $\{Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_n}\}$ と $\{Z_{t_1}, \ldots, Z_{t_n}\}$ が独立となることも分かる. これは確率過程としての $(Y_t), (Z_t)$ の独立性を意味する. ■

問 3.4 上の証明において (3.2) を示し, これから (3.3) を導け.

3.3 連続時間ランダムウォーク (Continuous-time random walks)

パラメータ 1 の独立な指数時間毎に, 1 歩の分布 $(p_j)_{j\in S}$ に従って, 場所 $i \in S$ から $i + j$ へ確率 p_j でジャンプする確率過程 $(X_t)_{t\geq 0}$ を**連続時間ランダムウォーク**という.

この連続時間ランダムウォーク $(X_t)_{t\geq 0}$ は, 一歩の分布 (p_j) をもつ離散時間ランダムウォーク $(Y_n)_{n\geq 0}$ とそれと独立なパラメータ 1 のポアッソン過程 (S_t) を用いて $X_t := Y_{S_t}$ として構成される.

このとき (Y_n) と (S_t) の独立増分性により, (X_t) も独立増分性をもつことが容易に分かるので, 問 3.2 から, 連続時間マルコフ連鎖となる.

3.4 連続時間マルコフ連鎖と推移確率 (Continuous-time Markov chains & transition probabilities)

可算集合 S に値をとる連続時間マルコフ連鎖 $(X_t)_{t\geq 0}$ も上の連続時間ランダムウォークと同様にして, 定義される. 即ち, 推移確率 $p(i,j)$ をもつ離散時間マルコフ連鎖 $(Y_n)_{n\geq 0}$ とそれと独立な 1-ポアッソン過程 $(S_t)_{t\geq 0}$ を用いて, $X_t := Y_{S_t}$ で構成される.

$s,t\geq 0$, $i,j,k_{u_\ell}\in S$ $(0\leq u_\ell<s)$ $(\ell\leq\ell_0)$ に対し,

$$P(X_{t+s}=j \mid X_s=i, X_{u_\ell}=k_{u_\ell}\ (\ell\leq\ell_0)) = P(X_t=j\mid X_0=i) =: q_t(i,j).$$

しかも上の推移確率 $q_t(i,j)$ は Y_n の n 階推移確率 $p_n(i,j)$ を用いて, 次で与えれられる.

$$q_t(i,j)=\sum_{n\geq 0} e^{-t}\frac{t^n}{n!}p_n(i,j).$$

[$X_t := Y_{S_t}$ がマルコフ連鎖なることの証明]　簡単のため, 上式の右辺を $\widetilde{q}_t(i,j)$ とおき, さらにマルコフ性は $\ell_0=1$ のときのみ示す. 任意に $u<s, \ell\leq n$ をとる. まず

$$P\left(X_{t+s}=j \;\middle|\; \begin{matrix} X_s=i \\ S_s=n\end{matrix}, \begin{matrix} X_u=k \\ S_u=\ell\end{matrix}\right) = P\left(X_{t+s}=j \;\middle|\; \begin{matrix} X_s=i \\ S_s=n\end{matrix}\right) = \widetilde{q}_t(i,j) \tag{3.4}$$

を示す. (Y_n) と (S_t) の独立性, (Y_n) のマルコフ性, (S_t) の独立増分性を用いると

$$\begin{aligned}
&P\left(X_{t+s}=j \;\middle|\; \begin{matrix} X_s=i \\ S_s=n\end{matrix}, \begin{matrix} X_u=k \\ S_u=\ell\end{matrix}\right) \\
&= \sum_{m\geq 0} P\left(X_{t+s}=j, S_{t+s}=n+m \;\middle|\; \begin{matrix} X_s=i, \\ S_s=n\end{matrix}, \begin{matrix} X_u=k, \\ S_u=\ell\end{matrix}\right) \\
&= \sum_{m\geq 0} P\left(Y_{n+m}=j, S_{t+s}-S_s=m \;\middle|\; \begin{matrix} Y_n=i, \\ S_s=n\end{matrix}, \begin{matrix} Y_\ell=k, \\ S_u=\ell\end{matrix}\right) \\
&= \sum_{m\geq 0} \frac{P(Y_{n+m}=j, Y_n=i, Y_\ell=k)P(S_{t+s}-S_s=m)P(S_s=n, S_u=\ell)}{P(Y_n=i, Y_\ell=k)P(S_s=n,S_u=\ell)} \\
&= \sum_{m\geq 0} P(Y_{n+m}=j\mid Y_n=i, Y_\ell=k)P(S_{t+s}-S_s=m) \\
&= \sum_{m\geq 0} P(Y_m=j\mid Y_0=i)P(S_t=m)=\widetilde{q}_t(i,j).
\end{aligned}$$

一方, 同様な計算で

$$\begin{aligned}
P(X_{t+s}=j\mid X_s=i, S_s=n) &= \sum_{m\geq 0} P(X_{t+s}=j, S_{t+s}-S_s=m\mid X_s=i, S_s=n) \\
&= \sum_{m\geq 0} \frac{P(Y_{n+m}=j, Y_n=i)P(S_{t+s}-S_s=m)P(S_s=n)}{P(Y_n=i)P(S_s=n)} \\
&= \sum_{m\geq 0} P(Y_{n+m}=j\mid Y_n=i)P(S_t=m)=\widetilde{q}_t(i,j).
\end{aligned}$$

以上から (3.4) が成り立つ. 最後の式 $\widetilde{q}_t(i,j)$ が $\ell\leq n$ にも, $k\in S$, $u<s$ にも無関係で, しかも $\ell\leq n$ については条件の事象が互いに素なので, 条件の方で和をとっても結果は変わらない (下の注をみよ). よって時間的一様なマルコフ性が得られる.

$$P(X_{t+s}=j\mid X_s=i, X_u=k) = P(X_{t+s}=j\mid X_s=i)=\widetilde{q}_t(i,j).$$

これから推移確率も分かる.

$$q_t(i,j) = P(X_t = j \mid X_0 = i) = \widetilde{q_t}(i,j).$$

■

注 上の証明で条件の方で和をとっても良いというのは, 次の問による.

問 3.5 事象列 $\{B_n\}$ が互いに素で, 事象 A に対し, ある $0 \le q \le 1$ が存在し, $P(A \mid B_k) = q$ $({}^\forall n \ge 1)$ をみたしているとする. このとき $P(A \mid \bigcup B_n) = q$ が成り立つことを示せ.

命題 3.5 (チャップマン-コルモゴロフの方程式) $q_{t+s}(i,j) = \sum_{k\in S} q_t(i,k)q_s(k,j).$

証明

$$\begin{aligned}
[\text{右辺}] &= \sum_{k\in S} P(X_t = k \mid X_0 = i)P(X_{t+s} = j \mid X_t = k) \\
&= \sum_{k\in S} P(X_t = k \mid X_0 = i)P(X_{t+s} = j \mid X_t = k, X_0 = i) \\
&= \sum_{k\in S} \frac{P(X_{t+s} = j, X_t = k, X_0 = i)}{P(X_0 = i)} \\
&= \frac{P(X_{t+s} = j, X_0 = i)}{P(X_0 = i)} = P(X_{t+s} = j \mid X_0 = i) = [\text{左辺}]
\end{aligned}$$

■

命題 3.6 Y_n が $\mathbf{Z}_+$ 上の出生率 λ_i, 死亡率 μ_i ($i \in \mathbf{Z}_+$ の離散時間出生死亡連鎖のとき, 連続時間出生死亡連鎖 $X_t = Y_{Z_t}$ の推移確率について次が成り立つ. (但し $\mu_0 = 0, \lambda_i > 0$, また $i \ge 1$ なら $\mu_i > 0$.)

$$\begin{aligned}
&q_h(i,i+1) = \lambda_i h + o(h) \\
&q_h(i,i-1) = \mu_i h + o(h) \ (i \ge 1) \\
&q_h(i,i) = 1 - (\lambda_i + \mu_i)h + o(h) \\
&q_0(i,j) = \delta_{ij}.
\end{aligned}$$

特に $\lim_{h\to 0} q_h(i,i) = 1$. 但し $q_h(0,-1) = 0$, $q_h(0,0) = 1$ に注意.

証明 推移確率 $q_h(i,j)$ は Y_n の n 階推移確率 $p_n(i,j)$ を用いて, $t \to 0$ のとき

$$\begin{aligned}
q_h(i,j) &= \sum_{n\ge 0} e^{-h}\frac{h^n}{n!}p_n(i,j) \\
&= e^{-h}\left(\delta_{ij} + hp(i,j) + O(h^2)\right) \\
&= \delta_{ij} + hp(i,j) + O(h^2).
\end{aligned}$$

これと

$$p(i,i+1) = \lambda_i, \quad p(i,i-1) = \mu_i, , \quad p(i,i) = 1 - (\lambda_i + \mu_i)$$

に注意すれば容易に分かる. ■

一般に (X_t) を S に値をとる時間的一様なマルコフ連鎖として, 適当な関数 $f : S \to \mathbf{R}$ に対し,

$$Gf(i) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(E^i[f(X_t)] - f(i)\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} E^i[f(X_t) - f(X_0)]$$

で定まる G を (X_t) の**生成作用素 (generator)** という. 但し, $E^i[\cdot] = E[\cdot \mid X_0 = i]$ とする.

定理 3.3 上の出生死亡連鎖においては, 有界関数 $f : \mathbf{Z}_+ \to \mathbf{R}$ に対し,

$$Gf(i) = \lambda_i f(i+1) + \mu_i f(i-1) - (\lambda_i + \mu_i) f(i)$$

となる. さらに

$$E^i[f(X_t) - f(X_0)] = \int_0^t E^i[Gf(X_s)]ds.$$

証明 $h > 0$ が十分小さいとき,

$$\begin{aligned} E^i[f(X_h)] &= f(i+1)q_h(i,i+1) + f(i-1)q_h(i,i-1) + f(i)q_h(i,i) + o(h) \\ &= f(i) + h\left[\lambda_i f(i+1) + \mu_i f(i-1) - (\lambda_i+\mu_i)f(i)\right] + o(h) \end{aligned}$$

これより $Gf(i)$ は求まる. さらにマルコフ性を用いると,

$$\begin{aligned} E^i[f(X_t) - f(X_0)] &= \int_0^t \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} E^i[f(X_{s+h}) - f(X_s)]ds \\ &= \int_0^t \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} E^i\left[E^{X_s}[f(X_h) - f(X_0)]\right] ds \\ &= \int_0^t E^i\left[\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} E^{X_s}[f(X_h) - f(X_0)]\right] ds \\ &= \int_0^t E^i\left[Gf(X_s)\right] ds. \end{aligned}$$

但し, 上で $\lim_{h\to 0}$ と E^i の交換が出来るのは, f の有界性と $0 < \lambda_i, \mu_i < 1$ から, ルベーグの収束定理が使えることによる. ■

上の定理は $f(i)$ から瞬間的に rate λ_i で $f(i+1)$ に, rate μ_i で $f(i-1)$ に, rate $1 - \lambda_i - \mu_i$ で変わらないことを表している. 従って逆に生成作用素 G が分かれば, マルコフ過程 (X_t) も分かることになる. 即ち G と (X_t) が 1 対 1 に対応する. この生成作用素の概念は状態空間 S がもっと一般のとき, マルコフ過程論において重要な位置を占める.

3.5 連続時間ゴルトン-ワトソン過程 (Continuous-time Galton-Watson processes)

$\lambda > 0$ とする. いくつかの粒子があり, 各粒子は, 独立な λ-指数時間毎に確率 p_k でランダムに $k \geq 0$ 個の粒子に分裂する ($k = 0$ のときは死滅という). 分裂した粒子も独立に, 同じ法則に従って, 分裂・死滅を繰り返すものとする. このとき時刻 t での全体の粒子数を Z_t で表し, 連続時間ゴルトン-ワトソン過程という.

これは $\{X_n\}$ を分裂確率 (p_k) をもつ離散時間ゴルトン-ワトソン過程とし, $\{S_t\}$ をそれと独立な λ-ポアッソン過程として, $Z_t := X_{S_t}$ とおけば構成できる.

分裂粒子数の期待値を

$$m := \sum_{k \geq 1} k p_k$$

とおく.

定理 3.4 $0 < p_0 + p_1 < 1$ とする.

$$P({}^\forall t \geq 0, Z_t \geq 1) > 0 \iff m > 1.$$

また $t \geq 0$ に対し, $E[Z_t \mid Z_0 = 1] = e^{\lambda(m-1)t}$ となる.

証明 離散時間のときの結果と構成の仕方から, 前半は容易に分かる. 平均について考える. $E_1[*] := E[* \mid Z_0 = 1]$ として, $Z_t = X_{S_t}$ と $E_1[X_n] = m^n$ より,

$$\begin{aligned} E_1[Z_t] &= \sum_{n=0}^{\infty} E_1[Z_t \mid S_t = n] P_1(S_t = n) = \sum_{n=0}^{\infty} E_1[X_n \mid S_t = n] P(S_t = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E_1[X_n] P(S_t = n) = \sum_{n=0}^{\infty} m^n e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = e^{\lambda(m-1)t} \end{aligned}$$

■

4 分枝ランダムウォーク (Branching Random Walk)

分枝ランダムウォークとは離散集合の上で, 1 つの粒子から出発し, 時間と共にある確率法則に従って, 粒子の生成死滅を繰り返すことにより, 変化して行く粒子系全体の配置を表す確率過程をいう.

S を高々可算個の点からなる集合とし, その点を 1 つ $\mathrm{O} \in S$ と表し, 固定する. $x \in S, t \geq 0$ とする. また $\{p(x,y)\}_{y\in S}$ を S 上のあるマルコフ連鎖の推移確率とする, i.e., $p(x,y) \geq 0$, $\sum_y p(x,y) = 1$. 但し, 各 x 毎に $p(x,y) > 0$ なる y は有限個とする, i.e., ${}^{\forall}x \in S, \#\{y \in S; p(x,y) > 0\} < \infty$.

定義 4.1 $\lambda > 0$ をパラメータとして, **分枝ランダムウォーク** $\{b_t^x = b_t^{x,\lambda}\}$ とは, 時刻 0 で x に 1 つの粒子があり, それはランダムな時間 (指数時間) σ^x で死ぬ. しかしそれとは別に, 死ぬ前に, ある独立な指数時間 $v\sigma^{x,y} = \sigma_\lambda^{x,y}$ が経てば y へ粒子を 1 つ生む. これを死滅時間 σ^x まで行う. 生まれた各粒子は同様に, しかも独立に, 生成死滅を繰り返す. この粒子系の時刻 t での配置を $b_t^{x,\lambda}$ で表す. ここで各指数時間は全て独立で, 次をみたす.

$$P(\sigma^x > t) = e^{-t}, \quad P(\sigma^{x,y} > t) = e^{-t\lambda p(x,y)}$$

但し $p(x,y) = 0$ なら $\sigma^{x,y} = \infty$ とする. 即ち, $p(x,y) = 0$ なら x から y へ粒子を生むことはない. このとき粒子の生成死滅のランダムな時間間隔は独立で, その分布は $\tau := \min\{\sigma^x, \sigma^{x,y}; y \in S\}$ と同じ $1+\sum_y \lambda p(x,y) = 1+\lambda$ 指数時間となる. $\tau = \sigma^x$ なら x の粒子は 1 つ死に, $\tau = \sigma^{x,y}$ (${}^{\exists}y \in S$) なら x の粒子は y へ粒子を 1 つ生む. このとき粒子を生む前に死ぬ確率 p_0 は, $\tau^x = \min_y \sigma^{x,y}$ とおくと λ-指数時間となり,

$$f_0 = P(\tau = \sigma^x) = P(\sigma^x < \tau^x) = \int_0^\infty P(s < \tau^x) e^{-s} ds = \int_0^\infty e^{-\lambda s} e^{-s} ds = \frac{1}{1+\lambda}.$$

これから $b_t^{x,\lambda}$ は x に 1 つだけ粒子がある状態から発展した粒子系の時刻 t での全体の粒子の配置を表すといえる. また $b_t^{x,\lambda}(y)$ を $b_t^{x,\lambda}$ の場所 y での粒子数を表すとすると $b_t^{x,\lambda} = \{b_t^{x,\lambda}(y)\}_{y\in S}$ とも表現でき, $|b_t^{x,\lambda}| = \sum_y b_t^{x,\lambda}(y)$ は全体の粒子数を表す. 固定した点 $\mathrm{O} \in S$ に対し,

$$\rho(\lambda) := P\left({}^{\forall}t > 0, |b_t^{\mathrm{O},\lambda}| \geq 1\right)$$

とおく. このとき 2 つの臨界指数を次で定義する.

$$\lambda_1 := \inf\{\lambda > 0; \rho(\lambda) > 0\}, \quad \lambda_2 := \inf\left\{\lambda > 0; P\left(\limsup_{t\to\infty} b_t^{\mathrm{O},\lambda}(\mathrm{O}) \geq 1\right) > 0\right\}.$$

構成から $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \infty$ となる ($\limsup_{t\to\infty} b_t^{\mathrm{O},\lambda}(\mathrm{O}) \geq 1$ なら ${}^{\forall}t > 0, |b_t^{\mathrm{O},\lambda}| \geq 1$ による).

定理 4.1 可算集合 S 上の $\mathrm{O} \in S$ を出発する分枝ランダムウォーク $\{b_t^{\mathrm{O},\lambda}\}$ に対し, ${}^{\exists}\gamma \in [0,1]$;

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \frac{1}{1-\gamma}$$

但し, $\gamma = 1$ なら $\lambda_2 = \infty$. 特に $\gamma > 0$ なら このとき 2 つの相転移が起きる.

上の定数 $\gamma \in [0,1]$ は初めに与えられた推移確率 $p(x,y)$ から, 以下に述べるようにして決まる. そのために用いる定理を先に与えておく.

補題 4.1 (優加法定理 (super additive theorem)) $[0,\infty)$ 上の連続関数 $f(t)$ が優加法的であるとする, i.e.,

$$f(t+s) \geq f(t)+f(s).$$

このとき

$$^\exists \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} f(t) = \sup_{t>0} \frac{1}{t} f(t) \in (-\infty,\infty].$$

証明 $s>0$ を固定する. $t>s$ に対し, t を s で割った商を $k_{s,t}$ とすると $t = k_{s,t}s + (t-k_{s,t}s)$ で余りは $0 \leq t-k_{s,t}s < s$ をみたす. 仮定の優加法性を帰納的に用いて,

$$f(t) \geq k_{s,t} f(s) + f(t-k_{s,t}s).$$

ここで $m(s) := \inf_{r<s} f(r)$ とおくと, f の連続性から有限値で,

$$\frac{1}{t} f(t) \geq \frac{1}{t} k_{s,t} f(s) + \frac{1}{t} m(s).$$

また $0 \leq t-k_{s,t}s < s$ の両辺を st で割り, $t\to\infty$ とすると

$$0 \leq \frac{1}{s} - \frac{k_{s,t}}{t} < \frac{1}{t} \to 0, \quad \text{即ち}, \quad \frac{k_{s,t}}{t} \to \frac{1}{s}$$

となるので,

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} f(t) \geq \frac{1}{s} f(s) \ (^\forall s>0). \quad \text{よって} \quad \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} f(t) \geq \sup_{s>0} \frac{1}{s} f(s).$$

一方,

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} f(t) \leq \sup_{s>0} \frac{1}{s} f(s).$$

は明らかなので, これから題意を得る. ■

$P_t(x,y)$ を 1-指数時間毎に, x から y へ確率 $p(x,y)$ で跳ぶ連続時間マルコフ連鎖の x から出発し, 時刻 t で y にいる推移確率とすると

$$P_t(x,y) = \sum_{n\geq 0} e^{-t} \frac{t^n}{n!} p_n(x,y)$$

となる. これから $P_t(\mathrm{O},\mathrm{O})$ は $t\geq 0$ に関し, 連続で, さらにチャップマン-コルモゴルフ方程式から

$$P_{t+s}(\mathrm{O},\mathrm{O}) = \sum_{y\in S} P_t(\mathrm{O},y) P_s(y,\mathrm{O}) \geq P_t(\mathrm{O},\mathrm{O}) P_s(\mathrm{O},\mathrm{O})$$

となる. これから $f(t) = \log P_t(\mathrm{O},\mathrm{O})$ は優加法関数 (super additive ft.) なる. 従って上の優加法定理より,

$$^\exists \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log P_t(\mathrm{O},\mathrm{O}) = \sup_{t>0} \frac{1}{t} \log P_t(\mathrm{O},\mathrm{O}) =: -\gamma \quad (\gamma \geq 0 \text{ となる}).$$

また $P_t(\mathrm{O},\mathrm{O}) \geq e^{-t}$ より, $\gamma \leq 1$, 即ち, $0 \leq \gamma \leq 1$. もし $\gamma > 0$ なら $P_t(\mathrm{O},\mathrm{O})$ は指数減衰することになり, このとき分枝ランダムウォークには 2 つの相転移が起きることになる.

[$\lambda_1 = 1$ **の証明**]

$Z_t = |b_t^{\mathrm{O},\lambda}|$ は連続時間ゴルトン-ワトソン過程となる. このとき各粒子は $(1+\lambda)$-指数時間毎に, 確率 $p_0 = 1/(1+\lambda)$ で死滅し, 確率 $p_2 = \lambda/(1+\lambda)$ で粒子を 1 つ生む, 即ち, 粒子数は 2 つになる. 従って粒子 1 個あたりの子孫生成の期待値 m は

$$m = \frac{2\lambda}{1+\lambda}$$

となる. ゴルトン-ワトソン過程は $m \le 1$ なら確率 1 でいつかは死滅し, $m > 1$ なら死滅しない確率が正となる. 従って

$$\lambda \le 1 \iff m \le 1 \iff \rho(\lambda) = 0, \quad 即ち, \quad \lambda > 1 \iff m > 1 \iff \rho(\lambda) > 0.$$

これから $\lambda_1 = 1$ を得る. ■

λ_2 の値を求めるには次の 2 つの結果を必要とする.

命題 4.1 $E[b_t^{x,\lambda}(\mathrm{O})] = e^{(\lambda-1)t} P_{\lambda t}(x, \mathrm{O})$.

証明 $m(t,x) := E[b_t^x(\mathrm{O})]$ とおき, $m(t+h,x)$ に対し, 最初のジャンプ時刻 $\tau = \min\{\sigma^x, \sigma^{x,y}; y \in S\}$: $(1+\lambda)$-指数時間について, $[0,h]$ で条件をつけ, マルコフ性を用いることにより, 次を得る.

$$\begin{aligned}
m(t+h,x) &= E[b_{t+h}^x(\mathrm{O}); \sigma^x = \tau \le h] + \sum_{y \in S} E[b_{t+h}^x(\mathrm{O}); \sigma^{x,y} = \tau \le h] + E[b_{t+h}^x(\mathrm{O}); \tau > h] \\
&= \sum_{y \in S} E[b_t^x(\mathrm{O}) + b_t^y(\mathrm{O})] P(\sigma^{x,y} = \tau \le h) + E[b_t^x(\mathrm{O})] P(\tau > h) \\
&= \sum_{y \in S} \{m(t,x) + m(t,y)\} P(\sigma^{x,y} \le h) + m(t,x) P(\tau > h) + o(h) \\
&= \sum_{y \in S} \{m(t,x) + m(t,y)\}(1 - e^{-\lambda p(x,y)h}) + m(t,x) e^{-(1+\lambda)h} + o(h) \\
&= \sum_{y \in S} \{m(t,x) + m(t,y)\} \lambda p(x,y) h + m(t,x)\{1 - (1+\lambda)h\} + o(h).
\end{aligned}$$

これから

$$\begin{aligned}
\partial_t m(t,x) &= \sum_{y \in S} \{m(t,x) + m(t,y)\} \lambda p(x,y) - m(t,x)(1+\lambda) \\
&= \sum_{y \in S} \lambda p(x,y) m(t,y) - m(t,x).
\end{aligned}$$

また

$$P_t(x, \mathrm{O}) = \sum_{n \ge 0} e^{-t} \frac{t^n}{n!} p_n(x, \mathrm{O}) \quad と \quad p_n(x, \mathrm{O}) = \sum_{y \in S} p(x,y) p_{n-1}(y, \mathrm{O})$$

により,

$$\partial_t P_t(x, \mathrm{O}) = \sum_{y \in S} p(x,y) P_t(y, \mathrm{O}) - P_t(x, \mathrm{O})$$

が成り立ち, これが初期条件 $P_0(x, \mathrm{O}) = \delta_{x,\mathrm{O}}$ のもと, 一意解をもつことから, 上の $m(t,x)$ の方程式も初期条件 $m(0,x) = \delta_{x,\mathrm{O}}$ により, 次の一意解をもつ.

$$m(t,x) = e^{(\lambda-1)t} P_{\lambda t}(x, \mathrm{O})$$

■

補題 4.2 ${}^{\exists}T > 0; E[b_T^{\mathrm{O},\lambda}(\mathrm{O})] > 1$ なら $\limsup_{t \to \infty} P(b_t^{\mathrm{O},\lambda}(\mathrm{O}) \ge 1) > 0$.

証明 $b_t^{\mathrm{O}} = b_t^{\mathrm{O},\lambda}$ よりも存在しづらい粒子系 $\widetilde{b_t^{\mathrm{O}}}$ で, $Z_n := \widetilde{b_{nT}^x}(\mathrm{O})$ が優臨界 (分裂確率の平均が 1 より大) のゴルトン-ワトソン過程となるものを構成して証明する. $t < T$ までは $\widetilde{b_t^{\mathrm{O}}} = b_t^{\mathrm{O}}$ とし,

$t=T$ で O 以外の粒子は全て消し, O にある粒子のみで $\widetilde{b^{\rm O}_T}$ を定義する. 以後, $t=kT$ で O にある粒子は $t\in[kT,(k+1)T)$ までは $b^{\rm O}_t$ と同じように発展し, $t=(k+1)T$ で, 再び O 以外の粒子は全て消す. そこで $Z_0=1, Z_n=\widetilde{b^{\rm O}_{nT}}({\rm O})$ とおくと,

$$Z_n=\sum_{k=1}^{Z_{n-1}}Y_{n,k};\quad Y_{n,k}\overset{\rm (d)}{=}Z_1\overset{\rm (d)}{=}\widetilde{b^{\rm O}_T}({\rm O}), \text{独立}.$$

これは明らかにゴルトン-ワトソン過程で, 仮定から $EZ_1=E[\widetilde{b^{\rm O}_T}({\rm O})]=E[b^{\rm O}_T({\rm O})]>1$. 即ち, 優臨界過程で $c:=P(Z_n\ge 1,{}^\forall n\ge 0)>0$. 従って $\widetilde{b^{\rm O}_t}(x)\le b^{\rm O}_t(x)$ より,

$$0<c=P(Z_n\ge 1,{}^\forall n\ge 0)\le P(b^{\rm O}_{nT}({\rm O})\ge 1,{}^\forall n\ge 0)\le \limsup_{t\to\infty}P(b^{\rm O}_t({\rm O})\ge 1).$$

■

定理 4.1 $[\lambda_2=1/(1-\gamma)]$ の証明

(1) $\gamma<1$ のとき $\lambda_2\le 1/(1-\gamma)$ を示す ${}^\forall\lambda>1/(1-\gamma)$ をとる. $\lambda\ge\lambda_2$ を言えば良い. (それには $P(\limsup_{t\to\infty} b^{{\rm O},\lambda}_t({\rm O})\ge 1)>0$ を示せば良い.) ${}^\exists\varepsilon>0;\lambda>1/(1-\gamma-\varepsilon)$. また γ の定義

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log P_t({\rm O},{\rm O})=\sup_{t>0}\frac{1}{t}\log P_t({\rm O},{\rm O})=-\gamma$$

から ${}^\exists T\gg 1; 1/(\lambda T)\log P_{\lambda T}({\rm O},{\rm O})>-\gamma-\varepsilon$. $D:=\lambda(-\gamma-\varepsilon+1)-1>0$ に対し, 上の命題から $E[b^{{\rm O},\lambda}_T({\rm O})]=e^{(\lambda-1)T}P_{\lambda T}({\rm O},{\rm O})\ge e^{DT}>1$. 更に上の補題が適応できて

$$0<\limsup_{t\to\infty}P(b^{{\rm O},\lambda}_t({\rm O})\ge 1)\le P(\limsup_{t\to\infty}b^{{\rm O},\lambda}_t({\rm O})\ge 1).$$

これから $\lambda\ge\lambda_2$. 従って $\lambda_2\le 1/(1-\gamma)$.

次を考える前に γ の定義から, $P_{\lambda t}({\rm O},{\rm O})\le e^{-\gamma\lambda t}$ で, これと $E[b^{x,\lambda}_t({\rm O})]=e^{(\lambda-1)t}P_{\lambda t}(x,{\rm O})$ より各 $k\in\mathbf{N}$ に対し, $E[b^{{\rm O},\lambda}_k({\rm O})]\le e^{Ck}$. 但し, $C:=\lambda-1-\lambda\gamma=\lambda(1-\gamma)-1$ ($C\ge -1$ に注意).

(2) $\gamma<1$ のとき, $1/(1-\gamma)\le\lambda_2$ を示す. (すると (1) から $\lambda_2=1/(1-\gamma)$ をえる).

${}^\forall\lambda<1/(1-\gamma)$ に対し, $C<0$. $A_k=\{b^{{\rm O},\lambda}_k({\rm O})\ge 1\}$ として, $P(A_k)\le E[b^{{\rm O},\lambda}_k({\rm O})]\le e^{Ck}$ と $\sum_k e^{Ck}<\infty$ より, Borel-Cantelli の補題が適用できて, $P(\limsup A_k)=0$. これを連続時間に適用すると $P(\limsup_{t\to\infty}b^{{\rm O},\lambda}_t({\rm O})\ge 1)=0$ が示せる. 実際, $P(\liminf A_k^c)=1$, i.e., $P({}^\exists N;{}^\forall k\ge N, b^{{\rm O},\lambda}_k({\rm O})=0)=1$ から, もし $P(\limsup_{t\to\infty}b^{{\rm O},\lambda}_t({\rm O})\ge 1)>0$ なら正の確率で ${}^\exists t_k\in(k,k+1); b^{{\rm O},\lambda}_{t_k}({\rm O})\ge 1$ なる $k\ge N$ は無数にあり, しかも時刻 t_k で O にある粒子は時刻 $k+1$ には全て死ぬことになる. しかし, 一方で, O に無数の粒子があったとき, 各粒子が生まれてから 1 以上の時間生き延びる確率は $P(\sigma\ge 1)=e^{-1}$ で, 独立なので, Borel-Cantelli の第 2 補題から, 確率 1 で, 時刻 1 以上生き延びる粒子の数は無限となる. これは明らかに上に述べたことに反する. よって $P(\limsup_{t\to\infty}b^{{\rm O},\lambda}_t({\rm O})\ge 1)=0$ でなければならない. 従って $\lambda\le\lambda_2$ となり, $1/(1-\gamma)\le\lambda_2$ を得る.

(3) $\gamma=1$ なら $C=-1$ で, 上と同様にして ${}^\forall\lambda>0$ に対し, $\lambda\le\lambda_2$, 即ち, $\lambda_2=\infty$. ■

補題 4.3 (Borel-Cantelli の第 2 補題)

$A_n\in\mathcal{F}$ に対し, $\sum P(A_n)=\infty$ で, $\{A_n\}$ が独立なら $P(\limsup A_n)=1$.

証明 $\{A_n^c\}$ も独立であることから (→ 確かめよ), 任意の $m < n$ に対し,

$$P(\bigcap_{k=m}^{n} A_k^c) = \prod_{k=m}^{n}(1 - P(A_k)) \le \prod_{k=m}^{n} e^{-P(A_k)} = \exp\left[-\sum_{k=m}^{n} P(A_k)\right].$$

ここで不等式で $1 - e^{-u} \le u$ $(u \ge 0)$ を用いた. $n \to \infty$ として, 仮定の $\sum P(A_k) = \infty$ を用いると

$$P(\bigcap_{k=m}^{\infty} A_k^c) = \lim_{n\to\infty} P(\bigcap_{k=m}^{n} A_k^c) \le \lim_{n\to\infty} \exp\left[-\sum_{k=m}^{n} P(A_k)\right] = 0.$$

従って補集合を考えれば, 任意の m に対し, $P(\bigcup_{k=m}^{\infty} A_k) = 1$. $m \to \infty$ とすれば

$$\bigcup_{k\ge m} A_k \downarrow \bigcap_{m\ge 1}\bigcup_{k\ge m} A_k = \limsup A_k$$

により,

$$P(\limsup A_k) = \lim_{m\to\infty} P(\bigcup_{k\ge m} A_k) = 1.$$

■

問 $\{A_k\}_{k=1}^n$ が独立なら $\{A_k^c\}_{k=1}^n$ も独立を示せ.

例を 2 つ挙げておこう.

例 4.1 (1 次元分枝ランダムウォーク) $S = \mathbf{Z}$ とし, $p(x, x+1) = p$, $p(x, x-1) = 1-p =: q$ のときを考える. このとき粒子は以下のように時間発展する. サイト x にいる粒子は推移率 λp でサイト $x+1$ に, 推移率 λq でサイト $x-1$ に粒子を生成し, さらに粒子は推移率 1 で死滅する. $p_{2n}(\mathrm{O},\mathrm{O})$ を O から出発した 1 次元単純ランダムウォークが時刻 $2n$ で O にいる確率とすると $p_{2n}(\mathrm{O},\mathrm{O}) \sim (4pq)^n/\sqrt{\pi n}$ $(n \to \infty)$ であったので, これから次を得る.

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log P_t(\mathrm{O},\mathrm{O}) = 2\sqrt{pq} - 1 = -\gamma, \quad \text{即ち}, \quad \gamma = 1 - 2\sqrt{pq}. \tag{4.1}$$

従って $\lambda_2 = 1/(1-\gamma) = 1/(2\sqrt{pq})$ で, 特に $p = 1/2$ のときのみ $\gamma = 0$ で, $\lambda_2 = 1 = \lambda_1$ となる. つまり $p \ne q$ のときのみ 2 つの相転移が現れる.

(4.1) の証明 $p_{2n}(\mathrm{O},\mathrm{O}) \sim (4pq)^n/\sqrt{\pi n}$ $(n \to \infty)$ より, $0 < {}^\exists C_1 < 1 < C_2 < \infty$;

$$C_1(4pq)^n/\sqrt{\pi n} \le p_{2n}(\mathrm{O},\mathrm{O}) \le C_2(4pq)^n/\sqrt{\pi n} \quad (n \ge 1).$$

また $p_{2n+1}(\mathrm{O},\mathrm{O}) = 0$ から

$$P_t(\mathrm{O},\mathrm{O}) = \sum_{n\ge 0} e^{-t}\frac{t^{2n}}{(2n)!}p_{2n}(\mathrm{O},\mathrm{O})$$

で, 上の不等式から

$$\begin{aligned} P_t(\mathrm{O},\mathrm{O}) &\le e^{-t}\left(1 + \sum_{n\ge 1}\frac{t^{2n}}{(2n)!}C_2(4pq)^n/\sqrt{\pi n}\right) \\ &\le e^{-t}\left(1 + C_2 e^{-t}\sum_{n\ge 1}\frac{t^{2n}}{(2n)!}(2\sqrt{pq})^{2n}\right) \quad (1/\sqrt{\pi n} < 1 \text{ による}) \\ &\le C_2 e^{-t+2\sqrt{pq}t} = C_2 e^{t(-1+2\sqrt{pq})} \quad (C_2 > 1 \text{ による}) \end{aligned}$$

また下からは

$$\sum_{n\geq 0}\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}=\frac{e^t-e^{-t}}{2}\geq\frac{e^t}{4}\quad \text{if } t\gg 1$$

を用いて $C_3=C_1/\sqrt{\pi}<1$ とし, $\sqrt{n}\leq 2n+1$ と $2\sqrt{pq}\leq 1$ から $t\gg 1$ 十分大なら

$$\begin{aligned}
P_t(\mathrm{O},\mathrm{O}) &\geq e^{-t}\left(1+\sum_{n\geq 1}\frac{t^{2n}}{(2n)!}C_1(4pq)^n/\sqrt{\pi n}\right)\\
&\geq e^{-t}\left(\frac{C_3}{t}+C_3\frac{1}{t}\sum_{n\geq 1}\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}(2\sqrt{pq})^{2n+1}\right)\\
&\geq C_3\frac{1}{t}e^{-t}\sum_{n\geq 0}\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}(2\sqrt{pq})^{2n+1}\\
&\geq C_3\frac{1}{4t}e^{t(-1+2\sqrt{pq})}.
\end{aligned}$$

従って

$$C_3\frac{1}{4t}e^{t(-1+2\sqrt{pq})}\leq P_t(\mathrm{O},\mathrm{O})\leq C_2e^{-t+2\sqrt{pq}t}=C_2e^{t(-1+2\sqrt{pq})}.$$

これから求める結果を得る. ■

例 4.2 (一様ツリー上の元分枝ランダムウォーク) $d\geq 3$ とし, $S=T_d$ $(=\mathbf{T}^{d-1})$ を各サイトが一様に d 個のサイトに枝分かれしている無限のツリーグラフとする. ($d=2$ のとき $T_2=\mathbf{Z}^1$ となることから, 次元を $d-1$ することが多く, $\mathbf{T}^{d-1}$ と表す方がポピュラーかも？) ここでサイト x の d 個の最近接サイト y に対し, $p(x,y)=1/d$ とする. このとき 1 次元ランダムウォークのように $R:=2\sqrt{d-1}/d$ に対し, $p_{2n}(\mathrm{O},\mathrm{O})\sim CR^{2n}n^{-3/2}$ $(n\to\infty)$ なることが知られている. これから次を得る.

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log P_t(\mathrm{O},\mathrm{O})=R-1=-\gamma,\quad 即ち,\quad \gamma=1-R.$$

これから $\lambda_2=1/(1-\gamma)=1/R=d/(2\sqrt{d-1})$ で, $d\geq 3$ なら $\lambda_2>1=\lambda_1$ となり, 2 つの相転移をもつ.

5 コンタクト・プロセス (Contact Process)

コンタクト・プロセスとは, あるグラフ上で, ある点に粒子があると, ランダムな時間で死ぬのだが, 隣へ粒子がいないときのみ, ランダムに生んで行くというものである. 元々は, 病気の接触感染モデルで, ある人が病気にかかると隣の人へ感染して行き, かかった人はいつかは治るが, また感染する場合もあるということを表す. ここでは一様なツリーグラフ上でのみ考える. $d\geq 2$ とし, $S=T_d=\mathbf{T}^{d-1}$ を上の例で述べたように各サイトが d 個の隣の点をもつ一様なツリーとする. 但し $d=2$ なら $S=\mathbf{Z}$ である. $\mathrm{O}\in T_d$ を 1 つ固定する.

$\{\eta_t^x=\eta_t^{x,\lambda}\}$ を $x\in T_d$ を出発するコンタクトプロセスとする. これは分枝ランダムウォークの定義で, 死ぬ推移率は 1 のままとし, 生む推移率を隣の点の場合にのみ $\lambda>0$ とする. 但し 1 つのサイトには高々 1 つの粒子しか存在できないとする. 即ち, $P(\sigma^x>t)=e^{-t}$ で, y が x の隣の点なら $P(\sigma^{x,y}>t)=e^{-t\lambda}$ だが, もし y に既に粒子があれば, 生まないということである. (要は例 4.2 で, λ を $d\lambda$ に変えて, 1 つのサイトには粒子は 1 個までという制限を加える.)

分枝ランダムウォークと同様に臨界指数を

$$\begin{aligned}\lambda_1 &:= \inf\{\lambda; P(|\eta_t^{\mathrm{O},\lambda}| \geq 1, {}^\forall t > 0) > 0\} \\ \lambda_2 &:= \inf\{\lambda; P(\limsup_{t\to\infty} \eta_t^{\mathrm{O},\lambda}(\mathrm{O}) \geq 1) > 0\}\end{aligned}$$

と定義する．このとき次が得られる．

定理 5.1 $T_d = \mathbf{T}^{d-1}$ 上の $\mathrm{O} \in T_d$ を出発するコンタクトプロセス $\{\eta_t^{\mathrm{O},\lambda}\}$ の臨界指数に対し, 次が成立する．

$$\frac{1}{d} \leq \lambda_1 \leq \frac{1}{d-2}, \quad \lambda_2 \geq \frac{1}{2\sqrt{d-1}}.$$

ちなみに同じ推移率での分枝ランダムウォークの臨界指数は $\lambda_1 = 1/d$, $\lambda_2 = 1/(2\sqrt{d-1})$ となる．(生成率が λ/d から λ に変わっていることに注意すれば, 例 4.2 の値を d で割ったものと一致する.)

証明 コンタクトプロセスと分枝ランダムウォークを比較することにより, 下からの評価は明らか. (即ち $\lambda > \lambda_1$ なら $\lambda \geq 1/d$ より, $\lambda_1 \geq 1/d$, 同様に $\lambda_2 \geq 1/(2\sqrt{d-1})$.)

λ_1 の上からの評価のために, コンタクトプロセスより粒子数の少ない粒子系 $\widetilde{\eta}_t$ で, その粒子数がゴルトン-ワトソン過程となるものを構成する．d 個ある最近接のサイトのうち $d-1$ 個にだけ, 率 λ で, 死ぬ前であれば, それぞれに 1 回のみ粒子を生み, 一度, 粒子が存在したサイトには 2 度と生まないとする．明らかに $\widetilde{\eta}_t \leq \eta_t^{\mathrm{O},\lambda}$ で, O から k の距離のサイトにある粒子数を Z_k とおく, i.e., $Z_0 = 1$, $Z_k = \widetilde{\eta}_t(S_k)$ ($x \in S_k \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} |x| = k$) とおけば, $\{Z_k\}$ はゴルトン-ワトソン過程となる．各粒子が死ぬ前に粒子を生む確率は

$$P(\sigma^{x,y} < \sigma^x) = \int_0^\infty ds \lambda e^{-\lambda s} P(s < \sigma^x) = \int_0^\infty ds \lambda e^{-\lambda s} e^{-s} = \frac{\lambda}{1+\lambda}$$

となることから, $EZ_1 = (d-1)\lambda/(1+\lambda)$.

$$(d-1)\frac{\lambda}{1+\lambda} > 1 \iff \lambda > \frac{1}{d-2}$$

に注意すれば, $\lambda > 1/(d-2)$ なら

$$0 < P(Z_k \geq 1, {}^\forall k \geq 0) \leq P(|\eta_t^{\mathrm{O},\lambda}| \geq 1, {}^\forall t > 0).$$

従って $\lambda \geq \lambda_1$. よって $\lambda_1 \leq 1/(d-2)$. ■

注意 5.1 ここで Liggett [7] と Stacey [10] により, それぞれ独立に, $d \geq 3$ では $\lambda_1 < \lambda_2$ が得られている．次に λ_2 の上からの評価について考えよう．一般に上の d を $d+1$ に代えて, $\lambda_2 = \lambda_2(d)$ in $\mathbf{T}^d = T_{d+1}$ ($d \geq 1$) と表すとグラフの埋め込み $T_d \subset T_{d+1}$ により, $\lambda_2(1) \geq \lambda_2(2) \geq \lambda_2(3) \geq \cdots$ が成り立つ．また上の結果は $\lambda_2(d) \geq 1/(2\sqrt{d})$ となる．Liggett により, $d = 1$ ($\mathbf{T}^1 = T_2 = \mathbf{Z}^1$) のとき, $\lambda_2(1) \leq 2$ ([5], より正確には $\lambda_2(1) \leq 1.942$, [6]) が知られている．しかし, シミュレーションの結果から $\lambda_2(1) \fallingdotseq 1.639$ 近くであることは信じられている．

また $d \geq 2$ では $\lambda_2(d) \leq \lambda_2(1) \wedge \{1/(\sqrt{d}-1)\}$ も知られている [8]. しかしこれの評価は $1/(\sqrt{2}-1) = \sqrt{2}+1 > 1.942 > 1/(\sqrt{3}-1) = (\sqrt{3}+1)/2 = 1.3660\cdots$ より, $d = 2$ では意味を持たない．更に $1 \leq d \leq 5$ では, 当面, 知られている結果としては (下からは $d = 1$ は

Grillenberger-Ziezold [4], $d = 2$ は Liggett [7], $d \geq 3$ は Pemantle [9])

$$\begin{aligned}
d = 1 &\implies 1.539 \leq \lambda_2 = \lambda_1 \leq 1.942, \\
d = 2 &\implies 0.609 \leq \lambda_2 \leq 1.942, \\
d = 3 &\implies 0.425 \leq \lambda_2 \leq (\sqrt{3}+1)/2 = 1.3660254\cdots, \\
d = 4 &\implies 0.354 \leq \lambda_2 \leq 1, \\
d = 5 &\implies 0.309 \leq \lambda_2 \leq (\sqrt{5}+1)/4 = 0.809169\cdots.
\end{aligned}$$

となる. さらに d が大きくなれば, 分枝ランダムウォークの結果に近づくと考えられるので, $\lambda_2(d) \sim 1/(2\sqrt{d})$ $(d \to \infty)$ となるはずである.

従って問題としては $d \to \infty$ のとき, $\sqrt{d}\lambda_2(d) \to 1/2$ の証明と $d \geq 2$ のときの λ_2 の上からの評価の改善であるが, 特に $d = 3$ そして $d = 2$ のときにどこまで言えるのかが一つの大きな山となるであろう.

Liggett の $\lambda_2(d) \leq 1/(\sqrt{d}-1)$ は以下の単純なアイデアで得ることが出来る.

簡単のため, 区間 $I = [a,b], (a,b], (a,b), [a,b)$ に対し, "$x \in \eta(I)$" で "$x \in \eta_s$ for $^\exists s \in I$" を表す.

元々, コンタクトプロセスは病気の感染モデルなので, 以下では「サイト x に粒子を生む」=「サイト x が感染する」, 「サイト x の粒子が死ぬ」=「サイト x が回復する」と言い換えることにする.

証明の概略だけ述べる. $\{x_1, x_2 \ldots, x_d, x_{d+1}\}$ を O の隣点を表すことにする. 各 x_i は O から確率 $P(\tau^{\mathrm{O}} < \sigma^{\mathrm{O}}) = \lambda/(\lambda+1)$ で, 感染を受ける). ここで新たな確率過程 $\{\xi_t^{\mathrm{O}}\}$ を元の $\{\eta_t\}$ において O から x_{d+1} への感染が許されない制限されたものとする. 同様に $\{\xi_t^{x_i}\}$ $(i = 1, \ldots, d)$ を x_i から O への感染の許されないものとする. すると $\{\xi_t^{x_i}\}$ は独立となる. $n \geq 2$ と十分小さい $\varepsilon > 0$ と大きい $r > 1$ に対し, $t \geq r$ なら, ラフに言って次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
f(t;n) &:= P_{\mathrm{O}}\left(\mathrm{O} \in \xi^{\mathrm{O}}([t, t+nr))\right) \\
&\gtrsim \sum_{i=1}^{d} P_{\mathrm{O}}\left(x_i \in \xi_s^{\mathrm{O}} \text{ for some } s \in [t, t+(n-1)r) \text{ and } \mathrm{O} \in \xi^{\mathrm{O}}((s, t+nr))\right) \\
&\fallingdotseq \sum_{i=1}^{d} P_{\mathrm{O}}\left(x_i \in \xi^{\mathrm{O}}([\varepsilon, r))\right) P_{x_i}\left(x_i \in \xi^{\mathrm{O}}([t-\varepsilon, t-\varepsilon+(n-1)r))\right) \\
&\qquad\qquad P_{x_i}\left(\mathrm{O} \in \xi^{\mathrm{O}}((0,r))\right) \\
&\fallingdotseq \left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^2 \sum_{i=1}^{d} P_{x_i}\left(x_i \in \xi^{x_i}([t-\varepsilon, t-\varepsilon+(n-1)r))\right) \\
&\fallingdotseq d\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^2 f(t-\varepsilon; n-1)
\end{aligned}$$

実際, $\sqrt{d}\lambda/(\lambda+1) > 1$ なら, 十分小さい $\varepsilon > 0$ と大きい $r > 1$ に対し, 次が示せる.

$$f(t;n) \geq f(t-\varepsilon; n-1).$$

従って, $\lambda > 1/(\sqrt{d}-1)$ なら,

$$\begin{aligned}
P_{\mathrm{O}}^{\lambda}(\limsup_{t\to\infty} \eta_t(\mathrm{O}) = 1) &\geq P_{\mathrm{O}}^{\lambda}(\limsup_{t\to\infty} \xi_t^{\mathrm{O}}(\mathrm{O}) = 1) \\
&\geq \limsup_{k\to\infty} f(r+k\varepsilon; k+1) \geq f(r;1) \geq e^{-r} > 0.
\end{aligned}$$

よって $\lambda_2(d) \leq 1/(\sqrt{d}-1)$ をえる.

6 補章

本章では第 1 章で述べた大数の強法則と中心極限定理の証明を与える.

6.1 大数の強法則の証明

第 1 章で述べた大数の強法則についてその証明を与える. その前に 2 つの収束概念について述べておく.

一般に確率変数 X_n, X に対して, $^\forall\varepsilon > 0$, $P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \to 0$ $(n \to \infty)$ のとき, $X_n \to X$ in pr. と表し, X_n が X に**確率収束**するという. また $P(X_n \to X) = 1$ のとき, $X_n \to X$, P-a.s. と表し, X_n が X に**概収束**するという. (a.s. は almost surely の略)

問 6.1 “**概収束** $\Longrightarrow$ **確率収束**”, i.e., $X_n \to X$, P-a.s. $\Longrightarrow X_n \to X$ in pr. を示せ.

(**ヒント** $P(X_n \to X) = 1 \iff$

$$P\left(\bigcap_{k\geq 1}\bigcup_{N\geq 1}\bigcap_{n\geq N}\left\{|X_n - X| < \frac{1}{k}\right\}\right) = 1 \iff P\left(\bigcup_{k\geq 1}\bigcap_{N\geq 1}\bigcup_{n\geq N}\left\{|X_n - X| \geq \frac{1}{k}\right\}\right) = 0$$

$$\iff {}^\forall k \geq 1, \lim_{N\to\infty} P\left(\bigcup_{n\geq N}\left\{|X_n - X| \geq \frac{1}{k}\right\}\right) = P\left(\bigcap_{N\geq 1}\bigcup_{n\geq N}\left\{|X_n - X| \geq \frac{1}{k}\right\}\right) = 0$$

$$\Longrightarrow {}^\forall k \geq 1, \lim_{N\to\infty} P\left(|X_N - X| \geq \frac{1}{k}\right) \leq \lim_{N\to\infty} P\left(\bigcup_{n\geq N}\left\{|X_n - X| \geq \frac{1}{k}\right\}\right) = 0$$

これは確率収束と同値 (即ち, $1/k$ を $\varepsilon > 0$ に置き換えられる. 何故か？)

注意 6.1 一般に, 上の問の逆は成り立たない. 即ち, 確率収束しても概収束しない例が作れる. しかし, 確率収束していれば, 適当な部分列が概収束するようにとれることは知られている.

問 6.2 「確率収束なら適当な部分列に対して概収束」, i.e., ”$X_n \to X$ in pr. $\Rightarrow {}^\exists\{n_k\}; X_{n_k} \to X$ a.s.“を示せ.

(**ヒント** 確率収束の仮定より, 次が分る (何故か?) $^\exists\{n_k\}$; $P\left(|X_{n_k} - X| \geq \dfrac{1}{2^k}\right) \leq \dfrac{1}{2^k}$. 和が収束することから Borel-Cantelli の補題が使えて $P\left(\displaystyle\bigcup_{N\geq 1}\bigcap_{k\geq N}\left\{|X_{n_k} - X| < \frac{1}{2^k}\right\}\right) = 1$. これから容易に分る.)

さてこれから大数の強法則の話に入ろう. 一応, 再び, 定理を述べておく.

定理 6.1 (大数の強法則 (Strong Law of Large Numbers)) $X_1, X_2, \dots$ を独立な確率変数で, 平均一定 $EX_n = m$, 分散が有界 $v := \sup_n V(X_n) < \infty$ であるとする. このとき次が成り立つ：

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k = m\right) = 1.$$

[証明の流れ] まず $EX_n = 0$ として示せば良く, $\overline{S}_n = \sum_{k=1}^{n} (X_k/k)$ に対し,

(1) **Kolmogorov の最大不等式**より $\sup_{k \geq n} |\overline{S_k} - \overline{S_n}| \to 0$ $(n \to \infty)$ in pr.

(2) 「確率収束なら適当な部分列に対して概収束」を用いれば,
確率 1 で $\{\overline{S_n}\}$ が Cauchy 列, 故に収束列.

(3) **Kronecker の補題**より $\dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \to 0$ P-a.s.

という手順で示す. そのため Kolmogorov の最大不等式と Kronecker の補題を先に与え, 証明する.

補題 6.1 (Kolmogorov の最大不等式) $\{X_n\}$ を独立な確率変数列で, 平均 $EX_n = 0$ とする. 部分和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_n$ に対し,

$$a > 0 \quad \Longrightarrow \quad a^2 P(\max_{1 \leq n \leq N} |S_n| \geq a) \leq E[|S_N|^2; \max_{1 \leq n \leq N} |S_n| \geq a] \leq E[|S_N|^2]$$

[証明] $A_k = \{|S_k| \geq a, |S_1| < a, \ldots, |S_{k-1}| < a\}$, $S^{(k+1)} = X_{k+1} + \cdots + X_N$ とおくと, $S^{(k+1)}$ と $S_k 1_{A_k}$ は独立で $E[S_k S^{(k+1)}; A_k] = E[S_k 1_{A_k}] E[S^{(k+1)}] = 0$. また $A = \bigcup_{k=1}^{N} A_k$ (素和). よって

$$\begin{aligned}
E[|S_N|^2; \max_{1 \leq n \leq N} |S_n| \geq a] &= \sum_{k=1}^{N} E[(S_k + S^{(k+1)})^2; A_k] \\
&= \sum_{k=1}^{N} E[S_k^2 + 2 S_k S^{(k+1)} + (S^{(k+1)})^2; A_k] \\
&\geq \sum_{k=1}^{N} E[S_k^2; A_k] \\
&\geq \sum_{k=1}^{N} a^2 P(A_k) \quad (A_k \text{ 上 } |S_k| \geq a \text{ より}) \\
&= a^2 P(\max_{1 \leq n \leq N} |S_n| \geq a)
\end{aligned}$$

■

補題 6.2 (Kronecker の補題) 数列 $\{x_n\}$ と $\{a_n\}; 0 < a_n \uparrow \infty$ に対し,

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{a_k} \quad \text{exists} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} x_k = 0$$

[証明] $s_0 = 0$, $s_n = \sum_{k=1}^{n} (x_k/a_k) \to s$ とする.

$$\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_n} \frac{x_k}{a_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_n} (s_k - s_{k-1}) = s_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_{k+1} - a_k}{a_n} s_k.$$

結局, 題意は

$$s_n \to s \quad なら \quad \frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)s_k \to s$$

の証明に帰着する. これは $s^* = \sup_m |s_m| < \infty$ と $^\forall\varepsilon > 0, {}^\exists N; {}^\forall k \geq N, |s_k - s| < \varepsilon$ より, $n > N$ に対し, 和を N で分けて

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)s_k - s\right| \quad \left(s = \frac{1}{a_n}\sum_{k=N}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)s + \frac{a_N}{a_n}s \quad \text{として}\right)\\
&\leq \quad \frac{1}{a_n}\sum_{k=N}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)|s_k - s| + \frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{N-1}(a_{k+1}-a_k)(\sup_m |s_m|) + \frac{a_N}{a_n}|s|\\
&\leq \quad \varepsilon\frac{a_n - a_N}{a_n} + s^*\frac{a_N - a_1}{a_n} + \frac{a_N}{a_n}|s|\\
&\to \quad \varepsilon \quad (n \to \infty)
\end{aligned}$$

よって $\varepsilon > 0$ の任意性から極限は 0. ■

[大数の強法則 (定理 1.4) の証明] まず X_n の代わりに $\widetilde{X}_n = X_n - EX_n$ を考えると $\{\widetilde{X}_n\}$ も独立で $V(\widetilde{X}_n) = V(X_n) \leq v$ より, 初めから $EX_n = 0$ として示せば十分. このとき独立性から $E[X_nX_m] = E[X_n]E[X_m] = 0$ $(m \neq n)$, また $E[X_n^2] = V(X_n) \leq v$. そこで $\overline{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{X_k}{k}$ とおくと, Kolmogorov の最大不等式より, 任意の $a > 0$ に対し,

$$a^2P(\max_{n<k\leq N}|\overline{S_k} - \overline{S_n}| \geq a) \leq E[|\overline{S}_N - \overline{S_n}|^2] = \sum_{k=n+1}^{N}\frac{E[X_k^2]}{k^2} \leq \sum_{k>n}\frac{v}{k^2}.$$

順に $N \to \infty, n \to \infty$ として,

$$\lim_{n\to\infty} P(\sup_{k>n}|\overline{S_k} - \overline{S_n}| \geq a) = 0, \quad \text{i.e.,} \quad \sup\nolimits_{k>n}|\overline{S_k} - \overline{S_n}| \to 0 \ (n \to \infty) \text{ in pr.}$$

よって適当な部分列 $\{n_j\} \subset \mathbf{N}; n_j \uparrow \infty$ をとれば,

$$\lim_{j\to\infty}\sup_{k\geq n_j}|\overline{S_k} - \overline{S}_{n_j}| = 0 \quad P\text{-a.s.}$$

これから $n, m \geq n_j$ なら $|\overline{S_n} - \overline{S_m}| \leq |\overline{S_n} - \overline{S}_{n_j}| + |\overline{S_m} - \overline{S}_{n_j}| \to 0$ $(j \to \infty)$ P-a.s., 即ち, $\{\overline{S_n}\}$ は Cauchy 列となり, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{X_k}{k} = \lim_{n\to\infty}\overline{S_n}$ が確率 1 で存在する. 従って Kronecker の補題を用いれば, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k = 0$ P-a.s. をえる. ■

上の証明から次が成り立つ.

系 6.1 $\{X_n\}$ を平均 0 の独立な確率変数列とする. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}V(X_k) < \infty$ なら極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}X_k$ は確率 1 で存在する.

系 6.2 大数の法則の定理の条件の下, 任意の $\delta > 0$ に対し, 次も成り立つ.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^{1+\delta}}}\sum_{k=1}^{n}(X_k - EX_k) = 0 \quad P\text{-a.s.}$$

証明は大数の法則の証明で $\overline{S_n}$ として $\sum_{k=1}^{n}(X_k/\sqrt{k^{1+\delta}})$ を考えれば良い.

では上で δ を 0 としたときにはどうなるのだろうか？この疑問に対する (適当な条件の下での) 答えを与えるのが次々節の中心極限定理であるが, その証明には. 特性関数と呼ばれる, 確率測度の Fourier 変換を用いて, それが収束すると分布も収束するという事実が用いられる. そこで先に特性関数について述べ, その収束と分布の収束に関する定理を述べてから, 中心極限定理とその証明を与えようと思う.

6.2 特性関数と分布の収束 (Characteristic functions & convergence of distributions)

確率変数 X に対し, 次の関数 $\varphi = \varphi_X : \mathbf{R}^1 \to \mathbf{C}$ を X の**特性関数 (characteristic function)** という.

$$\varphi(z) = \varphi_X(z) := E\left[e^{izX}\right] \quad (z \in \mathbf{R}^1).$$

またこのとき X の**分布 (distribution)** $\mu(A) = \mu_X(A) := P(X \in A)$ に対し, 次のようにも表される.

$$\varphi(z) = \int_{\mathbf{R}} e^{izx}\mu(dx)$$

また $\mathbf{R}^1$ 上の確率測度 μ が与えられたとき (これを単に**分布 (dist.)** というが), 上で定義される $\varphi(z)$ を μ の特性関数という.

まず正規分布を定義しておく.

$\mathbf{R}$ 上の分布 $\mu(dx) = g(x)dx$ が

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2v}\right]$$

で与えられるとき, これを平均 m, 分散 v の**正規分布 (normal dist.)**, あるいは**ガウス分布 (Gauss dist.)** といい, それを表す記号として $N(m,v)$ を用いる (正規分布をもつ確率変数として用いることもある).

この分布の特性関数は次のようになる.

$$\varphi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx}\frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2v}\right] dx = \exp\left[imz - \frac{vz^2}{2}\right].$$

問 6.3 上の特性関数の計算を確かめよ.

テント関数 区間 $(-1,1)$ の外では 0 で, 間は 3 点 $(-1,0), (0,1), (1,0)$ を線分で結んだグラフをもつ関数を $T(x)$ とする, i.e.,

$$T(x) = \frac{1}{2}(|x+1| + |x-1| - 2|x|).$$

また $-\infty < a < b < \infty, h > 0$ に対し, 区間 (a,b) 上の高さ h の**テント関数**を

$$T_{a,b;h}(x) = hT\left(\frac{2}{b-a}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\right)$$

とおく．さらに高さ $h>1$ のテント関数から高さ 1 以上の部分を切り取ってできる台形関数 $D_{a,b;h}$ を次で定める．

$$D_{a,b;h}(x)=\min\{T_{a,b;h}(x),1\}=T_{a,b;h}(x)-T_{a+(b-a)/(2h),b-(b-a)/(2h);h-1}(x).$$

このテント関数は次のような分布に現れる．

問 6.4 U,V を独立な確率変数でともに $[0,a]$ $(a>0)$ 上の一様分布に従うとき, $X=U-V$ の分布の密度関数は $T_{-a,a;1/a}$ となることを示せ．またその特性関数は次で与えれることを示せ．

$$\varphi_X(z)=\frac{2(1-\cos az)}{a^2z^2}.$$

（ヒント） 有界な Borel 関数 f に対し,

$$E[f(X)]=\int_{-a}^{a}f(x)T_{-a,a;1/a}dx$$

を示せば良い．このとき, (U,V) の結合分布が独立性から, それぞれの分布の積になることを用いる．即ち,

$$P(U\in du,V\in dv)=P(U\in du)P(V\in dv)=\frac{1}{a}1_{[0,a]}(u)du\frac{1}{a}1_{[0,a]}(v)dv.$$

これにより, 上の計算は次に帰着する．

$$\frac{1}{a^2}\int_{\mathbf{R}}1_{[0,a]}(v)1_{[0,a]}(x+v)dv=T(x)$$

後半は, $U,-V$ の特性関数の積となることを用いる．

命題 6.1 確率変数 X の特性関数 $\varphi(z)$ に対し,

$$E[T(X)]=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(z)\frac{1-\cos z}{z^2}dz,$$

$$E[T_{a,b;h}(X)]=\frac{2h}{\pi(b-a)}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(z)e^{-i(a+b)z/2}\frac{1-\cos\frac{(b-a)z}{2}}{z^2}dz.$$

証明 まず前問より,

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{izx}T(x)dx=\frac{2(1-\cos z)}{z^2}.$$

さらに次が成り立つことが示せる．(要は、Fourier 逆変換)

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{izx}\frac{1-\cos z}{z^2}dz=\pi T(x). \tag{6.1}$$

これを認めれば, x へ X を代入し, 期待値をとると, Fubini の定理を用いて

$$E[T(X)]=\frac{1}{\pi}E\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{izX}\frac{1-\cos z}{z^2}dz\right]=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_X(z)\frac{1-\cos z}{z^2}dz.$$

後半の $E[T_{a,b;h}(X)]$ については変数変換により, 容易に示せる．最後に (6.1) を示そう．$(1-\cos z)/z^2$ が偶関数であることと

$$\cos zx(1-\cos z)=\cos zx-\frac{1}{2}(\cos z(x+1)+\cos z(x-1))$$

と変数変換により, (6.1) の左辺は次のようになる.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\cos zx\frac{1-\cos z}{z^2}dz &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos z(x+1)}{z^2}dz+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos z(x-1)}{z^2}dz\\ &\quad -\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos z}{z^2}dz\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos z}{z^2}dz\left(\frac{1}{2}(|x+1|+|x-1|)-|x|\right).\end{aligned}$$

これと等式 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos z}{z^2}dz=\pi$ から (6.1) を得る. ■

問 6.5 (i) 部分積分を用いて積分 $I(t)=\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-tz}\sin z dz\quad(t>0)$ を求めよ. $1/(1+t^2)$

(ii) 等式 $\displaystyle\int_0^{\infty}I(t)dt=\int_0^{\infty}\frac{\sin z}{z}dz$ を示し, その積分の値を求めよ. $\pi/2$

(iii) 部分積分を用いて証明の最後の等式 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos z}{z^2}dz=\pi$ を確かめよ.

確率変数 X,Y が同分布であるとは任意の $a\in\mathbf{R}$ に対し, $P(X>a)=P(Y>a)$ が成り立つときをいい, 記号で $X\overset{(\mathrm{d})}{=}Y$ と表す. ($X=Y$ in the sense of distribution の意)

定理 6.2 確率変数 X,Y の特性関数 φ_X,φ_Y に対し, $\varphi_X(z)=\varphi_Y(z)$ $(z\in\mathbf{R})$ なら X と Y の分布は一致する, i.e., $X\overset{(\mathrm{d})}{=}Y$.

証明 仮定と前の命題から任意のテント関数 $T_{a,b;h}$ に対し, $E[T_{a,b;h}(X)]=E[T_{a,b;h}(Y)]$, 故に任意の台形関数 $D_{a,b;h}$ に対しても $E[D_{a,b;h}(X)]=E[D_{a,b;h}(Y)]$. そこで $\lim_{h\to\infty}D_{a,b;h}(x)=I_{(a,b)}(x)$ に注意して Lebesgue の収束定理より $P(a<X<b)=P(a<Y<b)$. よって $X\overset{(\mathrm{d})}{=}Y$ を得る. ■

定理 6.3 確率変数 X と確率変数列 $\{X_n\}$ の特性関数をそれぞれ $\varphi(z)$, $\{\varphi_n(z)\}$ とする.

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(z)=\varphi(z)\quad(z\in\mathbf{R}^1)\quad[\text{各点収束}]$$

なら, 任意の $a<b; P(X=a)=P(X=b)=0$ に対し, $\lim_{n\to\infty}P(X_n>a)=P(X>a)$.

証明 仮定と $|\varphi_n(z)|\le 1$, さらに Lebesgue の収束定理により,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_n(z)e^{-i(a+b)z/2}\frac{1-\cos((b-a)z/2)}{z^2}dz=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(z)e^{-i(a+b)z/2}\frac{1-\cos((b-a)z/2)}{z^2}dz.$$

従って命題 6.1 より, $\lim_{n\to\infty}E[T_{a,b;h}(X_n)]=E[T_{a,b;h}(X)]$. よって任意の台形関数 $D_{a,b;h}$ に対しても $\lim_{n\to\infty}E[D_{a,b;h}(X_n)]=E[D_{a,b;h}(X)]$. さらに $h>1, a<b$ に対し,

$$I_{(a,b)}(x)\ge D_{a,b;h}(x)\ge I_{[a+(b-a)/(2h),b-(b-a)/(2h)]}(x)\quad(x\in\mathbf{R})$$

に注意すると

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty}P(a<X_n<b) &\ge \lim_{n\to\infty}E[D_{a,b;h}(X_n)]\\ &= E[D_{a,b;h}(X)]\ge P\left(a+\frac{b-a}{2h}\le X\le b-\frac{b-a}{2h}\right).\end{aligned}$$

ここで $h \to \infty, b \to \infty$ とすれば, ${}^\forall a \in \mathbf{R}$ に対し,

$$\liminf_{n\to\infty} P(X_n > a) \geq P(X > a).$$

また $h \to \infty, a \to -\infty$ とし, b を a に直せば, ${}^\forall a \in \mathbf{R}$ に対し, $\liminf_{n\to\infty} P(X_n < a) \geq P(X < a)$. これからさらに $\limsup_{n\to\infty} P(X_n > a) \geq 1 - \liminf_{n\to\infty} P(X_n < a) \geq 1 - P(X < a) = P(X \geq a)$ となるので ${}^\forall a \in \mathbf{R}; P(X = a) = 0$ に対し,

$$\limsup_{n\to\infty} P(X_n > a) \leq P(X > a).$$

従って $\lim_{n\to\infty} P(X_n > a) = P(X > a)$ を得る. ■

6.3 中心極限定理 (CLT=Central Limit Theorem)

定理 6.4 (CLT) 確率変数列 $\{X_n\}$ を独立同分布 (i.i.d.) とする. 平均を $EX_1 = m$, 分散を $V(X_1) = v$ とすると $\frac{1}{\sqrt{nv}}\sum_{k=1}^{n}(X_k - m)$ の分布は平均 0, 分散 1 の正規分布 $N(0,1)$ に収束する, i.e., 任意の $a < b$ に対し,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a < \frac{1}{\sqrt{nv}}\sum_{k=1}^{n}(X_k - m) < b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx.$$

まず証明の前に必要な補題を与えておく.

補題 6.3 $EX = 0, V(X) = E(X^2) = 1$ なる確率変数 X に対し,

$$\varphi_X\left(\frac{z}{\sqrt{n}}\right) - \left(1 - \frac{z^2}{2n}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \to \infty).$$

証明 $g(z)$ を

$$e^{iz} - 1 - iz + \frac{z^2}{2} = z^2 g(z)$$

で定義すると $|g(z) \leq 1$, $\lim_{z\to 0} g(z) = 0$ をみたす. 実際, テイラーの定理により,

$${}^\exists\theta \in (0,1); e^{iz} - 1 - iz = -\frac{z^2}{2}e^{i\theta z}$$

を用いれば $|g(z)| \leq 1$, $\to 0$ $(t \to 0)$ は容易に分かる. そこで

$$\exp\frac{izX}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{izX}{\sqrt{n}} - \frac{z^2X^2}{2n} + \frac{z^2X^2}{n}g\left(\frac{zX}{\sqrt{n}}\right)$$

において両辺の期待値をとれば,

$$\varphi_X\left(\frac{z}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{z^2}{2n} + E\left[\frac{z^2X^2}{n}g\left(\frac{zX}{\sqrt{n}}\right)\right].$$

ここで 最後の期待値については

$$X^2 g\left(\frac{zX}{\sqrt{n}}\right) \leq X^2, \quad \lim_{n\to\infty} g\left(\frac{zX}{\sqrt{n}}\right) = 0$$

より, Lebesgue の収束定理が適応できて, $n \to \infty$ で 0 に収束する. 従って求める結果を得る. ■

[CLT の証明]

$\widetilde{X}_n = (X_n - m)/\sqrt{v}$ とすると $E\widetilde{X}_n = 0, V(\widetilde{X}_n) = 1$ で $\{\widetilde{X}_n\}$ は i.i.d. となるので, $m = 0, v = 1$ のときに示せば良い. $Y_n := (\sum_{k=1}^n X_k)/\sqrt{n}$ に対し, その特性関数は $\{X_k\}$ が i.i.d. であることから,

$$\varphi_n(z) = E\left[\exp\left(\frac{iz}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n X_k\right)\right] = \prod_{k=1}^n \varphi_{X_k}\left(\frac{z}{\sqrt{n}}\right) = \varphi_{X_1}\left(\frac{z}{\sqrt{n}}\right)^n.$$

さらに上の補題により, 各 $z \in \mathbf{R}$ に対し,

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(z) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{z^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = \exp[-z^2/2].$$

ここで最後の等号については

$$\left(1 - \frac{z^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = \left(1 - \frac{z^2}{2n}\right)^n + R_n(z)$$

で $R_n(z)$ を定義すると $|R_n(z)| = o(1)$ $(n \to \infty)$ が示せる (下の問). 従って, $\varphi_n(z)$ が正規分布 $N(0,1)$ の特性関数 $\varphi(z) = \exp[-z^2/2]$ に各点収束するので前定理 (定理 6.3) より, 正規分布が質点を持たないことと併せて, 定理の証明が終わる. ■

問 6.6 証明の最後の $|R_n(z)| = o(1)$ $(n \to \infty)$ を示せ.

参考文献

[1] R. B. シナジ「マルコフ連鎖から格子確率モデルへ」今野紀雄／林　俊一　訳, シュプリンガー (2001)

[2] 西尾　真喜子「確率論」　実教出版　(1978 初版, 1985 第 5 版)

[3] 志賀　徳造「ルベーグ積分から確率論」　共立出版　(2000)

[4] Grillenberger, C. and Ziezold, H. (1988). On the critical infection relate of the one dimensional basic contact process: numerical results, *J. Appl. Probab.* **25**, 1–8.

[5] Liggett, T. (1985). *Interacting Particle Systems*, Springer-Verlag.

[6] Liggett, T. (1995). Improved upper bounds for the contact process critical value, *Ann. Probab.* **23**, 697–723.

[7] Liggett, T. (1996). Multiple transition points for the contact process on the binary tree, *Ann. Probab.* **24**, 1675–1710.

[8] Liggett, T. (1999). *Stochastic Interacting Contact, Voter and Exclusion Processes*, Springer-Verlag.

[9] Pemantle, R. (1992). Contact process on trees, *Ann. Probab.* **20**, 2089–2116.

[10] Stacey, A. (1996). The existence of an intermediates phase for the contact process on trees, *Ann. Probab.* **24**, 1711–1726.