Lévy 過程 (Lévy Processes)

平場　誠示 (Seiji HIRABA)

2024 年 7 月 12 日

目 次

本テキストでは, 確率過程の中でも基本となる独立増分性を持つもの, 即ち, **加法過程**について考え, 特に, その中でも, 確率連続で, 時間的一様性をもち, 見本関数が第 1 種不連続, 即ち, 右連続左極限をもつとき, **Lévy 過程**と呼び, これについて様々な性質を詳しく述べる.

Lévy 過程の各時点での分布が無限分解可能分布と呼ばれるものとなり, 1 対 1 対応がつくこと, 更に, その特性関数が **Lévy-Khintchine の標準形**で与えられることを示す. また, 見本関数が **Lévy-Ito 分解**という確率積分を用いた表現を持つことも重要である. それについては、次節で概要だけ, 紹介する.

本テキストは, **佐藤健一著「加法過程」(紀伊國屋書店)**を参考にし, 証明の殆どは, ほぼ同じであるが, 著者なりに理解し, 少しでも分り易くなるよう, 簡単化と詳細化を施したつもりである.

加法過程, Lévy 過程の定義は, テキストによって, 異なることがあり, 注意が必要である. 例えば, 佐藤健一著「加法過程」(紀伊國屋書店) では, Lévy 過程を加法過程と呼び, その英語版では, Lévy 過程と呼んでいる. 伊藤清著「確率論」(岩波書店) では、Lévy 過程には, 時間的一様性は仮定していない.

1 Lévy 過程についての概要

時間と共にランダムに変化する値を表すものを**確率過程 (stochastic process)** というが, 普通, 時間を $t \geq 0$ として, その時のランダムな値を $X_t = X_t(\omega)$ として表し, 確率過程を $(X_t)_{t\geq 0}$ と記す. 本テキストでは $\mathbf{R}^d$ に値をとるものしか考えないので, $X_t = (X_t^j)_{j\leq d}$ とする. 但し, ベクトルは $x = (x_j)_{j\leq d} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbf{R}^d$ と表す. また内積を $\langle x, y\rangle \equiv x \cdot y = \sum_{j\leq d} x_j y_j$ とする.

Lévy 過程とは, $\mathbf{R}^d$ で, 0 を出発し, 独立増分性と時間的一様性を持つ, 確率連続な確率過程で, 見本関数が右連続左極限をもつものを言う. これを $(X_t)_{t\geq 0}$ で表すと, 次と同値となる.

$^\forall t > 0$, X_t の分布 $\mu_t = P \circ X_t^{-1}$, i.e., $\mu_t(dx) = P(X_t \in dx)$ が**無限分解可能分布 (infinitely divisible distirbution)** と同値. これはまた次と同値: $\mu = \mu_1$ として, 任意の $t > 0$ に対し, $\mu_t = \mu^{t*}$ を満たす. 右辺は, μ の t 個の畳み込みを表す. 但し, 畳み込みとは, 一般に測度 μ, ν に対し,

$$\mu * \nu(dx) := \int \mu(dx - y)\nu(dy) = \int \nu(dx - y)\mu(dy) = \int\int 1_{dx}(y + z)\mu(dy)\nu(dz).$$

$\nu = \mu$ のとき, μ^{2*} と表し, 一般に, $n \in \mathbf{N}$ に対し, $\mu^{n+1*} = \mu^{n*} * \mu$ を定義. 更に, μ が無限分解可能分布のときは, これを正の有理数 m/n, 正の実数 t まで拡張して μ^{t*} が定義される.

更に, このとき, X_t 特性関数 $\widehat{\mu}_t(z) := E[e^{i\langle z, X_t\rangle}]$ $(i = \sqrt{-1})$ が **Lévy-Khintchine の標準形** を持つことと同値となる. 即ち, $\widehat{\mu}_t(z) = e^{t\psi(z)}$;

$$\psi(z) = -\frac{1}{2}\langle Az, z\rangle + \int_{(|x|\geq 1)} (e^{i\langle z,x\rangle} - 1)\nu(dx) + \int_{(|x|<1)} (e^{i\langle z,x\rangle} - 1 - i\langle z, x\rangle)\nu(dx) + i\langle\gamma, z\rangle.$$

ここで,

・$A = (a_{jk}); a_{jk} = \sum_{\ell\leq m} \sigma_\ell^j \sigma_\ell^k$, 但し, $\sigma = (\sigma_\ell^j)_{\ell\leq m, j\leq d}$: 拡散係数 (diffusion coefficient).

・$\gamma = (\gamma_j)_{j\leq d} \in \mathbf{R}^d$,

$\nu = \nu(dx)$ は **Lévy 測度** と呼ばれる $\mathbf{R}^d$ 上の測度で, $\nu(\{0\}) = 0$ と $\int_{\mathbf{R}^d} 1 \wedge |x|^2\nu(dx) < \infty$ を満たす.

更に, これは次とも同値となる. **Lévy-Ito の分解定理** という.

$$dX_t(\omega) = \gamma dt + \sigma dB_t(\omega) + \int_{(|x|\geq 1)} xN(\omega; dt, dx) + \int_{(|x|<1)} x\widetilde{N}(\omega; dt, dx), X_0 = 0.$$

より正確には,

$$X_t(\omega) = \gamma t + \sigma B_t(\omega) + \int_0^t \int_{(|x|\geq 1)} xN(\omega; ds, dx) + \int_0^t \int_{(|x|<1)} x\widetilde{N}(\omega; ds, dx).$$

成分で表せば, $X_t = (X_t^j)_{j\leq d} = (X_t^1, \dots, X_t^d)$;

$$X_t^j = \gamma_j t + \sum_{\ell\leq m} \sigma_\ell^j B_t^\ell + \int_0^t \int_{(|x|\geq 1)} x_j N(\omega; ds, dx) + \int_0^t \int_{(|x|<1)} x_j \widetilde{N}(\omega; ds, dx).$$

ここで, $B_t = (B_t^\ell)$: m 次元 Brown 運動で, $N(\omega; dt, dx)$: $dt\nu(dx)$-Poisson 配置 on $[0, \infty) \times \mathbf{R}^d$, $\widetilde{N} = N - \widehat{N}$: 補正 Poisson 配置. 但し, $\widehat{N} = E[N]$, i.e, $\widehat{N}(dt, dx) = dt\nu(dx)$: N の平均測度.

もう少し, 説明すると, $\Delta X_t := X_t - X_{t-}$ で X_t の時刻 t でのジャンプ（跳び）を表し, $N(dt, dx) := \sharp\{(t, \Delta X_t) \in dt \times dx; \Delta X_t \neq 0\}$ は時空間における跳びの配置を表す. このとき, Lévy 過程の独立増分性と時間的一様性から, N が Poisson 配置と呼ばれるものとなることが言える.

この分解定理は, ラフには, X_t から大きいジャンプを順に取り除いて行けば, 極限として残るのが, 連続過程となり, それが Gauss 過程となる, ということを表している. 厳密には, 小さいジャンプを除くときは、その平均を加えながら行う. (伊藤清はそのように証明した.) 即ち,

$$X_t^n = X_t - \int_0^t \int_{(|x|\geq 1)} xN(ds,dx) - \int_0^t \int_{(1/n\leq |x|<1)} x\widetilde{N}(ds,dx).$$

$n\to\infty$ とすれば, $X_t^n \to {}^{\exists}X_t^c$ となり, X_t^c が連続な Lévy 過程, つまり Gauss 過程となる.

このとき, 特性関数が上の標準形をもつことは, **伊藤の公式(ジャンプ型)** を用いれば, すぐ分かる. $f(x)=e^{ix\cdot z}\in C^2(\mathbf{R}^d)$ に対し,

$$\begin{aligned}
df(X_t) &= \gamma\cdot Df(X_t)dt + \sigma\cdot Df(X_t)dB_t + \frac{1}{2}\sigma^2\cdot D^2 f(X_t)dt \\
&\quad + \int_{(|x|\geq 1)} [f(X_{t-}+x)-f(X_{t-})]N(dt,dx) \\
&\quad + \int_{(|x|<1)} [f(X_{t-}+x)-f(X_{t-})]\widetilde{N}(dt,dx) \\
&\quad + \int_{(|x|<1)} [f(X_{t-}+x)-f(X_{t-})-x\cdot Df(X_{t-})]\nu(dx)dt
\end{aligned}$$

但し, $\gamma\cdot D=\gamma^j\partial_j$, $\sigma\cdot D=\sigma_\ell^j\partial_j$, $\sigma^2\cdot D^2=\sum_{\ell\leq m}\sigma_\ell^j\sigma_\ell^k\partial_{jk}^2$ (更に, 上と下にある添字については和をとるものとする). また $\partial_j=\partial/\partial x_j, \partial_{jk}^2=\partial^2/\partial x_j\partial x_k$.

平均をとれば確率積分の性質から, $B_t, \widetilde{N}$ の部分が消えることにより,

$$\begin{aligned}
d\varphi_t(z) &:= dE[f(X_t)] = E[df(X_t)] \\
&= i\gamma\cdot z\varphi_t(z)dt - \frac{1}{2}\sum_{\ell\leq m}\sigma_\ell^j\sigma_\ell^k z_j z_k\varphi_t(z)dt \\
&\quad + \int_{(|x|\geq 1)}\varphi_t(z)[e^{ix\cdot z}-1]dt\nu(dx) + \int_{(|x|<1)}\varphi_t(z)[e^{ix\cdot z}-1-ix\cdot z]dt\nu(dx) \\
&= \varphi_t(z)\Big\{ i\gamma\cdot z - \frac{1}{2}a_{jk}z^j z^k \\
&\quad + \int_{(|x|\geq 1)}[e^{ix\cdot z}-1]\nu(dx) + \int_{(|x|<1)}[e^{ix\cdot z}-1-ix\cdot z]\nu(dx)\Big\} dt.
\end{aligned}$$

つまり, $d\varphi_t(z)=\varphi_t(z)\psi(z)$. これと $\varphi_0(z)=E[e^{iz\cdot X_0}]=1$ より, 求める標準形 $\varphi_t(z)=e^{t\psi(z)}$ を得る.

他の同値については, この分解定理の表現を持つとき, 確率積分の性質から, 独立増分性と時間的一様性も分るので, Lévy 過程となる逆に, 特性関数が上の標準形を持つなら, X_t の分布は無限分解可能分布となり, それと法則の意味の Lévy 過程は(法則同等を除いて)1 対 1 に対応する. (§5.1)

後は, Lévy 過程が Lévy-Ito の分解定理を満たすことを示せば, 全ての同値が言えたことになる. これについても、天下り的に, 上の確率積分で表現された X_t の特性関数が, 同じ標準形をもつので, 法則同等となり, パスが右連続左極限をもつことから, 何れも $D([0,\infty)\to\mathbf{R}^d)$ 上の同じ分布をもつことになる. 従って, 元の Lévy 過程も分解できる(と言える).

ここで述べた, 確率積分 (伊藤積分) や伊藤の公式等について詳しく知りたければ, , 別テキストの**「確率積分と確率微分方程式」**を参照してもらいたい.

2 Lévy 過程の定義と基本例

本節では, Lévy 過程の定義と基本となる例として, Poisson 過程, 複合 Poisson 過程, さらに Brown 運動について述べる. (尚, Brown 運動については, 定義と性質と構成法のみ述べて, 証明については, テキスト「確率積分と確率微分方程式」を参照して欲しい.)

2.1 Lévy 過程の定義

定義 2.1 $\mathbf{R}^d$ 値確率過程 $(X_t)_{t\geq 0}$ が **Lévy 過程 (Lévy process)** であるとは, 次を満たすときをいう.

(1) $X_0 = 0$ a.s.

(2) (X_t) は独立増分性をもつ, i.e., $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, $\{X_{t_k} - X_{t_{k-1}}\}_{k\leq n}$ が独立.

(3) $s,t > 0$ に対し, $X_{t+s} - X_s \overset{(d)}{=} X_t$, i.e., 時間的一様性をもつ.

(4) 確率連続である, i.e., ${}^\forall t \geq 0, \varepsilon > 0$, $P(|X_s - X_t| < \varepsilon) \to 1$ $(s \to t)$.

(5) 確率 1 で, 見本関数が右連続左極限を持つ, i.e., ${}^\exists \Omega_0 \in \mathcal{F}; P(\Omega_0) = 1, {}^\forall \omega \in \Omega_0, (X_t(\omega))_{t\geq 0}$ が t の関数として右連続で左極限を持つ.

また, 最後の見本関数の以外の条件を満たすときは, 単に **法則の意味の Lévy 過程**という.

第 5.1 節で, 法則の意味の Lévy 過程は普通の Lévy 過程と同等であることを示すので, 見本関数の性質は本質的ではない. 即ち, (Y_t) が法則の意味の Lévy 過程なら, 普通の Lévy 過程 ${}^\exists(X_t)$ があり, ${}^\forall t > 0, P(X_t = Y_t) = 1$ を満たす.

確率連続の条件は, 0 を出発することと時間的一様性から, $t = 0$ での確率連続性に置き換えても良い. 即ち,

$$ {}^\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{t\downarrow 0} P(|X_t| < \varepsilon) = 1. $$

2.2 指数時間と Poisson 過程

定数 $\alpha > 0$ に対し, 確率変数 $\tau = \tau(\omega)$ が**パラメータ α の指数分布に従う** とは

$$ P(\tau > t) = \int_t^\infty \alpha e^{-\alpha s} ds = e^{-\alpha t} $$

をみたすときをいう. 即ち τ が密度関数 $f(s) = \alpha e^{-\alpha s}$ の分布をもつということである. 本テキストでは τ を単に **α-指数時間** or **指数時間 (exponential time)** と呼ぶことにする.

このとき平均と分散は容易に計算でき, 次のようになる.

$$ E[\tau] = \int_0^\infty \alpha s e^{-\alpha s} ds = \frac{1}{\alpha}, \quad V(\tau) = E[\tau^2] - (E[\tau])^2 = \frac{1}{\alpha^2}. $$

問 2.1 上の分散の計算を確かめよ.

命題 2.1 τ が指数時間なら, 次の**無記憶性 (memoryless property)** をもつ.
$t, s \geq 0$ に対し,

$$ P(\tau > t + s |\ \tau > s) = P(\tau > t). $$

[証明]

$$P(\tau > t+s|\ \tau > s) = \frac{P(\tau > t+s)}{P(\tau > s)} = \frac{e^{-(t+s)}}{e^{-s}} = e^{-t} = P(\tau > t).$$

■

命題 2.2 $\tau_1, \tau_2, \dots \tau_n$ が独立で, それぞれ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ の指数時間なら, $\min\{\tau_1, \tau_2, \dots \tau_n\}$ は $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$-指数時間となる. さらに

$$P(\min\{\tau_1, \tau_2, \dots \tau_n\} = \tau_k) = \frac{\alpha_k}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}.$$

[証明] 簡単のため $n = 2, k = 1$ のときに示す.

$$P(\tau_1 \wedge \tau_2\} > t) = P(\tau_1 > t, \tau_2 > t) = P(\tau_1 > t)P(\tau_2 > t) = e^{-(\alpha_1+\alpha_2)t}.$$

また τ_1, τ_2 の結合分布が, 独立性から, それぞれの分布の積となることから

$$\begin{aligned} P(\min\{\tau_1, \tau_2\} = \tau_1) &= P(\tau_1 < \tau_2) \\ &= \int_0^\infty ds \alpha_1 e^{-\alpha_1 s} P(s < \tau_2) \\ &= \int_0^\infty ds \alpha_1 e^{-\alpha_1 s} e^{-\alpha_2 s} \\ &= \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}. \end{aligned}$$

一般のときも同様である. ■

例 2.1 A と B の二つの装置からなるシステムがあり, A が故障するまでの時間が 1-指数時間で, B が故障するまでの時間が 2-指数時間であるという. これらは独立に故障し, 一つでも故障すれば, システム全体が故障するとする. このときシステムが故障するまでの時間の平均値を求めよ.

前の命題からシステムが故障するまでの時間は 3-指数時間となるので, その平均は 1/3 となる.

$\lambda > 0$ に対し, 確率過程 $(X_t)_{t\geq 0}$ が**パラメータ λ の Poisson (ポアッソン) 過程**であるとは Lévy 過程で, X_1 の分布が λ-Poisson 分布であるときをいう. 即ち, 以下をみたすときをいう (単に **λ-Poisson 過程**ともいう).

(1) $X_0 = 0$,

(2) $0 \leq s < t$ なら $X_t - X_s$ はパラメータ $\lambda(t-s)$ の Poisson 分布に従う. 即ち,

$$P(X_t - X_s = k) = e^{-\lambda(t-s)} \frac{\lambda^k (t-s)^k}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

(3) X_t は独立増分をもつ.

即ち, $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ に対し, $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ は独立.

定理 2.1 (Poisson 過程の構成) $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ を独立同分布な確率変数で, それぞれ λ-指数時間であるとする. $\tau_n = \sum_{k=1}^n \sigma_k$, $\tau_0 = 0$ とおき,

$$X_t = n \iff \tau_n \le t < \tau_{n+1} \quad \text{即ち,} \quad X_t := \sum_{n=0}^{\infty} n 1_{[\tau_n, \tau_{n+1})}(t) = \max\{n; \tau_n \le t\},$$

と定義するとこれは λ-Poisson 過程となる.

注 上の定理の逆も言える. 即ち, $(X_t)_{t\ge0}$ を λ-Poisson 過程とし, そのジャンプ時刻を $\tau_1, \tau_2, \dots$ とする. このとき $\tau_1, \tau_2 - \tau_1, \tau_3 - \tau_2, \dots$ は独立同分布で, それぞれ λ-指数時間となる.

証明の前に必要な事柄を述べておく.

命題 2.3 独立な n 個の λ-指数時間 σ_k の和 $\tau = \sum_{k=1}^n \sigma_k$ はガンマ分布 $\Gamma(n, \lambda)$ に従う, i.e.,

$$P(\tau < t) = \int_0^t \frac{1}{(n-1)!} \lambda^n s^{n-1} e^{-\lambda s} ds.$$

[証明] (σ_n) の独立性により,

$$P(\sigma_1 + \cdots + \sigma_n < t) = \int_{s_1 + \cdots s_n < t} \lambda^n e^{-\lambda(s_1 + \cdots s_n)} ds_1 \cdots ds_n$$

$u_k = s_1 + \cdots s_k$ $(k = 1, \dots, n)$, 特に $s = u_n$ として変数変換すれば,

$$\begin{aligned}
\int_{s_1 + \cdots s_n < t} \lambda^n e^{-\lambda(s_1 + \cdots s_n)} ds_1 \cdots ds_n &= \int_0^t du_n \int_0^{u_n} du_{n-1} \cdots \int_0^{u_2} du_1 \lambda^n e^{-\lambda u_n} \\
&= \int_0^t du_n \int_0^{u_n} du_{n-1} \cdots \int_0^{u_3} du_2 u_2 \ \lambda^n e^{-\lambda u_n} \\
&= \int_0^t du_n \frac{1}{(n-1)!} u_n^{n-1} \lambda^n e^{-\lambda u_n} \\
&= \int_0^t ds \frac{1}{(n-1)!} \lambda^n s^{n-1} e^{-\lambda s}
\end{aligned}$$

■

定理 2.1 の証明 まず τ_n は σ_{n+1} と独立で $\Gamma(n, \lambda)$ 分布に従うことから

$$\begin{aligned}
P(X_t = n) &= P(\tau_n \le t < \tau_{n+1} = \tau_n + \sigma_{n+1}) \\
&= \int_0^t ds \ \frac{1}{(n-1)!} \lambda^n s^{n-1} e^{-\lambda s} P(t < s + \sigma_{n+1}) \\
&= \int_0^t ds \ \frac{1}{(n-1)!} \lambda^n s^{n-1} e^{-\lambda s} e^{-(t-s)\lambda} \\
&= e^{-\lambda t} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^t s^{n-1} ds = e^{-\lambda t} \frac{\lambda^n t^n}{n!}.
\end{aligned}$$

次に同様な計算で

$$\begin{aligned}
P(\tau_{n+1} > t + s, X_t = n) &= P(\tau_{n+1} > t + s, \tau_n \le t < \tau_{n+1}) \\
&= P(\tau_n + \sigma_{n+1} > t + s, \tau_n \le t) \\
&= \int_0^t du \ \frac{1}{(n-1)!} \lambda^n u^{n-1} e^{-\lambda u} P(u + \sigma_{n+1} > t + s) \\
&= \int_0^t du \ \frac{1}{(n-1)!} \lambda^n u^{n-1} e^{-\lambda u} e^{-\lambda(t+s-u)} = e^{-\lambda(t+s)} \frac{\lambda^n t^n}{n!}
\end{aligned}$$

これから

$$P(\tau_{n+1} > t+s|\ X_t = n) = e^{-\lambda s} = P(\sigma_1 = \tau_1 > s). \tag{2.1}$$

更に, $X_t = n$ の条件のもと, $\tau_{n+1} - t, \sigma_{n+2}, \ldots, \sigma_{n+m}$ の分布は, $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ と一致する. 実際,

$$\begin{aligned}
&P(\tau_{n+1} - t > s_1, \sigma_{n+2} > s_2, \ldots, \sigma_{n+m} > s_m|\ X_t = n)\\
&\quad = P(\tau_n \le t < \tau_{n+1}, \tau_{n+1} - t > s_1, \sigma_{n+2} > s_2, \ldots, \sigma_{n+m} > s_m)/P(X_t = n)\\
&\quad = P(\tau_n \le t, \tau_{n+1} - t > s_1)P(\sigma_{n+2} > s_2, \ldots, \sigma_{n+m} > s_m)/P(X_t = n)\\
&\quad = P(\tau_{n+1} - t > s_1|\ X_t = n)P(\sigma_2 > s_2, \ldots, \sigma_m > s_m)\\
&\quad = P(\sigma_1 > s)P(\sigma_2 > s_2, \ldots, \sigma_m > s_m)\\
&\quad = P(\sigma_1 > s, \sigma_2 > s_2, \ldots, \sigma_m > s_m)
\end{aligned}$$

これより, $\tau_{n+m} - t = (\tau_{n+1} - t) + \sigma_{n+2} + \cdots + \tau_{n+m}$ に注意すれば, 一般に $m \ge 1$ に対し, 次も成り立つ.

$$P(\tau_{n+m} > t+s|\ X_t = n) = P(\tau_m > s).$$

上で m を $m+1$ に変えたものから m のときのを引けば,

$$P(\tau_{n+m} \le t+s < \tau_{n+m+1}|\ X_t = n) = P(\tau_m \le s < \tau_{m+1}) = P(X_s = m).$$

これを用いて, $n \ge 0, m \ge 1$ に対し,

$$\begin{aligned}
P(X_t = n, X_{t+s} - X_t = m) &= P(X_t = n, X_{t+s} = n+m)\\
&= P(X_t = n)P(X_{t+s} = n+m|\ X_t = n)\\
&= P(X_t = n)P(\tau_{n+m} \le t+s < \tau_{n+m+1}|\ X_t = n)\\
&= P(X_t = n)P(X_s = m)
\end{aligned}$$

これを $n \ge 0$ について加えることにより,

$$P(X_{t+s} - X_t = m) = P(X_s = m) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^m s^m}{m!}.$$

$m = 0$ のときは $P(X_{t+s} - X_t = m) = e^{-\lambda s}$ を得るので, 上に含まれる. 実際,

$$P(\tau_n > t+s|\ X_t = n) = P(\tau_n > t+s|\ \tau_n \le t < \tau_{n+1}) = 0$$

より, 上の式 (2.1) から引くと,

$$P(X_{t+s} = n|\ X_t = n) = P(\tau_n \le t+s < \tau_{n+1}|\ X_t = n) = e^{-\lambda s}.$$

従って,

$$\begin{aligned}
P(X_t = n, X_{t+s} - X_t = 0) &= P(X_t = n, X_{t+s} = n)\\
&= P(X_t = n)P(X_{t+s} = n|\ X_t = n)\\
&= P(X_t = n)e^{-\lambda s}.
\end{aligned}$$

これを $n \ge 0$ について加えれば $P(X_{t+s} - X_t = 0) = e^{-\lambda s}$.

最後に, 独立増分性については, $X_t = n$ の条件のもと, $\tau_{n+1} - t, \sigma_{n+2}, \dots, \sigma_{n+m}$ の分布が $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ と一致することを用いれば, $0 \le t_1 < \cdots < t_k$ に対し,

$$\begin{aligned}
&P(X_{t_0} = n_0, X_{t_1} - X_{t_0} = n_1, \dots, X_{t_k} - X_{t_{k-1}} = n_k) \\
&\quad = P(X_{t_0} = n_0, X_{t_1} = n_0 + n_1, \dots, X_{t_k} = n_0 + \cdots + n_k) \\
&\quad = P(X_{t_0} = n_0) P(X_{t_1 - t_0} = n_1, \dots, X_{t_k - t_0} = n_1 + \cdots + n_k)
\end{aligned}$$

これを繰り返して, 独立増分性をえる.

$$\begin{aligned}
&P(X_{t_0} = n_0, X_{t_1} - X_{t_0} = n_1, \dots, X_{t_k} - X_{t_{k-1}} = n_k) \\
&\quad = P(X_{t_0} = n_0) P(X_{t_1 - t_0} = n_1) \cdots P(X_{t_k - t_{k-1}} = n_k) \\
&\quad = P(X_{t_0} = n_0) P(X_{t_1} - X_{t_0} = n_1) \cdots P(X_{t_k} - X_{t_{k-1}} = n_k)
\end{aligned}$$

■

2.3 複合 Poisson 過程

定義 2.2 (X_t) が $\mathbf{R}^d$ 上の複合 Poisson 過程であるとは, Lévy 過程で, X_t の特性関数が次で与えられる. μ_t を X_t の分布とすると,

$$\widehat{\mu}_t(z) := E[e^{i\langle z, X_t \rangle}] = \exp[tc(\widehat{\sigma}(z) - 1)].$$

$c > 0$, $\sigma = \sigma(dx)$ は $\mathbf{R}^d$ 上の分布で, $\sigma(\{0\}) = 0$ を満たす.

更に, もっと直接的に次が成り立つ. $\mu_t = e^{-tc} \sum_{n \ge 0} \frac{(tc)^n}{n!} \sigma^{n*}$. 但し, $\sigma^{0*} = \delta_0$. (特性関数が一致するので明らか.)

[複合 Poisson 過程の構成] (N_t) を c-Poisson 過程. (S_n) を $\mathbf{R}^d$ 上で, $S_0 = 0$ を出発し, 1 歩の分布 σ を持つランダムウォークで, (N_t) とは独立とする. このとき $X_t := S_{N_t}$ が求める複合 Poisson 過程となる. 実際, 特性関数は

$$E[e^{i\langle z, S_{N_t} \rangle}] = \sum_{n \ge 0} E[e^{i\langle z, S_n \rangle}] P(N_t = n) = \sum_{n \ge 0} \widehat{\sigma}(z)^n e^{-tc} \frac{(tc)^n}{n!} = \exp[tc(\widehat{\sigma}(z) - 1)].$$

ここで, $E[e^{i\langle z, S_n \rangle}] = \widehat{\sigma}(z)^n$ については, $S_n = \sum_{k=1}^n (S_k - S_{k-1})$ $(S_0 = 0)$ で, $S_k - S_{k-1}$ の分布が σ, $\{S_k - S_{k-1}\}$ が独立であることを用いた.

2.4 Brown 運動 (Wiener 過程)

実数値確率過程 $(B_t)_{t \ge 0}$ が **Brown 運動 (Brownian motion)** であるとは, 連続な Lévy 過程で, つまり見本関数が連続な Lévy 過程で, B_1 が正規分布 $N(0,1)$ に従う. 即ち, 以下を満たすものをいう.

(1) $B_0 = 0$ a.s.

(2) (B_t) は連続, i.e., a.a.ω に対し, 見本関数 $B_\cdot(\omega)$ が連続.

(3) $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ に対し, $\{B_{t_k} - B_{t_{k-1}}\}_{k=1}^n$ は独立で, それぞれ, 正規分布 $N(0, t_k - t_{k-1})$ に従う.

この定義は 1 次元であるが, 独立な d 個の Brown 運動を成分として, $B_t = (B_t^1, \ldots, B_t^d)$ を **d 次元 Brown 運動** という. (d 個の Brown 運動の直積確率空間を考えれば, 独立となる.) この時, 満たす性質は上とほぼ同じで, (3) の最後で, 「$B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$ が d 次元正規分布 $N(0, (t_k - t_{k-1})I_d)$ に従う」 と変わるだけなので, それが定義だと言っても良い.

$W = C([0,\infty) \to \mathbf{R}^1)$ とし, 広義一様収束位相で定まる σ-加法族を $\mathcal{W}$ と表す.

さらに, $w = w(t) \in W_0 \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} w \in W; w(0) = 0$ とおく. また, 有限個の任意の時点 $\mathbf{t}_n = (t_1, \ldots, t_n); 0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \infty$ と, $A_n \in \mathcal{B}^n$ に対し, $C(\mathbf{t}_n, A_n) = \{w \in W_0; (w(t_1), \ldots, w(t_n)) \in A_n\}$ を**シリンダー集合 or 筒集合 (cylinder set)** という. シリンダー集合全体で生成される σ-加法族を, $\mathcal{W}_0$ と表す. (これは, W からの相対位相で定まる σ-加法族と一致することが知られている.)

定理 2.2 (Wiener 測度の存在と一意性) $(\Omega, \mathcal{F}) = (W_0, \mathcal{W}_0)$ として, この上に, $B_t(w) = w(t)$ が Brown 運動となるような確率測度 P_B が唯一つ存在する. この P_B を **Wiener 測度**という.

この証明の概要については節の最後に述べる.

今後, Brown 運動というときには, この Wiener 測度のもとでのものを考えるので, この Brown 運動を **Wiener 過程 (Wiener process)** ともいう.

また, d 次元 Brown 運動 $B_t = (B_t^1, \ldots, B_t^d)$ の分布は, $W_0^d \ni w; w \in C([0,\infty) \to \mathbf{R}^d), w(0) = 0$ 上の確率測度となり, これを **d 次元 Wiener 測度** という.

この分布は次のように与えられる.

$$p_t(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi t}^d} e^{-|x|} \quad (x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbf{R}^d,\ |x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2})$$

に対し, $P(B_t \in dx) = p_t(x)dx$ となる. この $g_t(x)$ を d 次元正規分布 $N_d(0,t)$ の密度関数という.

また, この正規分布の**特性関数 (characteristic ft)** は, 次で与えられる.

$$\varphi(z) = \varphi_{B_t}(z) := E[e^{iz \cdot B_t}] = e^{-t|z|^2/2} \quad (z \in \mathbf{R}^d).$$

但し, $z \cdot B_t = z_1 B_t^1 + \cdots + z_d B_t^d$.

更に, 1 次元の時,

$$p_t(x,y) := p_t(y-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-(y-x)^2/(2t)}$$

とすると, Brown 運動の有限次元分布は $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ と $A_k \in \mathcal{B}^1$ に対し,

$$P(B_{t_k} \in A_k) = \int_{A_1} dy_1 p_{t_1}(0, y_1) \int_{A_2} dy_2 p_{t_2 - t_1}(y_1, y_2) \cdots \int_{A_n} dy_n p_{t_n - t_{n-1}}(y_{n-1}, y_n)$$

で与えられる.

これは, 独立増分性より, $t_0 = 0$ として,

$$P(B_{t_k} - B_{t_{k-1}} \in A_k, k = 1, 2, \ldots, n) = \prod_{k=1}^n \int_{A_k} p_{t_k - t_{k-1}}(x_k) dx_k$$

となるので, 変数変換 $x_k = y_k - y_{k-1}$ $(y_0 = 0)$ を用いれば良い. 但し, $\{B_{t_1} \in A_1, B_{t_2} \in A_2\} == \{B_{t_1} \in A_1, B_{t_2} - B_{t_1} \in A_2 - A_1\}$ に注意. $A_2 - A_1$ は元毎の差の全体で, 差集合とは異なる.

以下, $(\mathcal{F}_t)$ を Brown 運動 (B_t) による標準情報系とする.
[Brown 運動の性質]

(1) $EB_t^{2n} = (2n-1)!!t^n, EB_t^{2n-1} = 0$ $(n \geq 1)$.

(2) $0 \leq s < t$ に対し, $B_t - B_s$ と $\mathcal{F}_s$ は独立. これは, 独立増分性と同値. また, これから, (B_t) が後で述べるマルチンゲールであることが分る. i.e., $0 \leq s < t \Rightarrow E[B_t - B_s | \mathcal{F}_s] = 0$

(3) 共分散 $E[B_t B_s] = t \wedge s$ $(s, t > 0)$.

(4) 連続過程 (X_t) が Brown 運動 $\overset{\text{def}}{\iff}$ $^\forall 0 \leq s < t$, $E[e^{iz(X_t - X_s)} | \mathcal{F}_s] = e^{-(t-s)z^2/2}$. 但し, $(\mathcal{F}_t)$ は (X_t) による標準的情報系である.

(5) 次の変換で Brown 運動は不変. ($a > 0$ は 1 つ固定する.)

$$B_t^a = B_{a+t} - B_a,\ \overline{B_t} = -B_t,\ S^a(B)_t = \sqrt{a}B_{t/a}.$$

但し, $S^a(B)_t$ を**スケール変換**という.

(6) $[T_1, T_2]$ での Brown 運動の全変動量は a.s. で無限大, i.e., 分割 $\Delta = \{t_k\}; T_1 = t_0 < t_1 < \cdot < t_n = T_2$ として,

$$V = \sup_{\Delta} \sum_{k=1} |B_{t_k} - B_{t_{k-1}}| = \infty \quad \text{a.s.}$$

(7) $^\forall \varepsilon > 0$, $(1/2 - \varepsilon)$-Hölder 一様連続性をもつ, 即ち, $\gamma > 0$ に対し,

$$\lim_{h \to 0} \sup_{s \neq t; |t-s| \leq h} \frac{|B_t - B_s|}{|t-s|^\gamma} = 0 \text{ or } \infty \text{ a.s. if } \gamma < 1/2 \text{ or } \gamma \geq 1/2.$$

(8) a.s. で Brown 運動の見本関数は全ての時点で微分不可である.

(9) (B_t) を d 次元 Brown 運動とする. T を d 次直交行列とすれば, (TB_t) も Brown 運動となる. また, $\tau_S := \inf\{t > 0; B_t \in S = S_r^{d-1}\}$ を球面 $S = \partial B^d(0, r)$ への到達時間とすれば, $B_{\tau_S} = B_{\tau_S(\omega)}(\omega)$ の分布は球面 S 上の一様測度となる.

他に次の性質を満たすことが知られている. (証明は略する.)

- $X_t = tB_{1/t}$ も Brown 運動. 但し, $X_0 = 0$ とする.
- $$\limsup_{t \downarrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log\log(1/t)}} = 1 \quad \text{a.s.}$$
  更に対称性より, $\liminf_{t \downarrow 0}$ は -1 で, スケール変換により,
  $$\limsup_{t \uparrow \infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log\log t}} = 1 \quad \text{a.s.}$$
- $^\forall \varepsilon > 0$, $(1/2 - \varepsilon)$-Hölder 一様連続性をもつが, より詳しくは次を満たす.

$$\lim_{h \to 0} \sup_{s \neq t; |t-s| \leq h} \frac{|B_t - B_s|}{\sqrt{2|t-s| \log(1/|t-s|)}} = 1.$$

[Brown 運動の構成] 3 通りの方法が知られているが, ここでは一番, 易しい方法で述べる. $t \in [0,1]$ で示せば十分である. $[0,T]$ も同様で, 一意性より, $[0,\infty)$ に拡張できる. $D = \bigcup_{n\geq 1}\{k/2^n; k=0,1,\ldots,2^n\}$ を $[0,1]$ 内の 2 進有理数全体とする.

まず, $\mathbf{R}^\infty$ 上への確率空間の拡張定理である **Kolmogorov の拡張定理** を用いることにより, $\mathbf{R}^D$ $(\in w = w(t) : D] \to \mathbf{R}$ 関数) 上に, $X_t(w) = w(t)$ の任意の有限次元分布が Brown 運動と同じ式で与えられる確率測度 P_0 が構成できる. (D の元に番号付けをして, ${}^\forall n$ 個の時点で, 有限次元分布が決まり, それが Kolmogorov の拡張定理の両立条件を満たすことがいえるので, D 全体で, 上の条件を満たす確率測度の存在がいえる.)

更に, 次の **Kolmogorov の正規化定理** の条件を満たすことがいえるので, (X_t) は D 上 a.s. で一様連続となり, その右連続化したもの $\widetilde{X_t} = \lim_{r\downarrow t; r\in D} X_r$ が連続変形となり, $B_t = \widetilde{X_t}$ が求めるものとなる.

定理 2.3 (Kolmogorov の正規化定理・連続変形定理)
(1) 一般に Banach 空間 $(B, \|\cdot\|)$ に値をとる確率過程 $\{X_t\}_{t\in D}$ が,

$$ {}^\exists C,\alpha,\beta > 0; E\|X_t - X_s\}^\alpha \leq C|t-s|^{1+\beta} $$

を満たすなら, X_t は D 上 a.s. で, 一様連続である.

(2) $\{X_t\}_{t\in[0,1]}$ が ${}^\forall s,t \in [0,1]$ に対し, 上と同じ不等式を満たせば, 連続変形 $\{\widetilde{X_t}\}_{t\in[0,T]}$ が一意的に存在し, しかも ${}^\forall \gamma < \beta/\alpha$ に対し, γ-Hölder 一様連続性をもつ.

$$ \lim_{h\to 0} \sup_{s\neq t; |t-s|\leq h} \frac{\|X_t - X_s\|^\gamma}{|t-s|} = 0 \quad \text{a.s.} $$

ここで, 次章以降で必要となる特性関数の性質について, いくつか述べておく.

$\mathbf{R}^d$ 上の確率測度, つまり, 分布の全体を $\mathcal{P}(\mathbf{R}^d)$ で表す.

特性関数 (c.f.=charcteristic function) $\widehat{\mu}(z) := \int_{\mathbf{R}^d} e^{i\langle z,x\rangle}\mu(dx)$ で, $\mu,\nu \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^d)$ の**畳み込み (convolution)**

$$ \mu * \nu(A) := \int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbf{R}^d} 1_A(x+y)\mu(dx)\nu(dy) = \int_{\mathbf{R}^d} \mu(A-y)\nu(dy) = \int_{\mathbf{R}^d} \nu(A-x)\mu(dx). $$

$\widehat{\mu*\nu}(z) = \widehat{\mu}(z)\widehat{\nu}(z)$ は容易に分る. また, 独立確率変数の和の分布は畳み込みとなる, i.e., 確率変数 X, Y が独立で, それぞれの分布が μ,ν なら, $X+Y$ の分布は, $\mu*\nu$ となる. 実際, $X+Y$ の特性関数が $\widehat{\mu}\widehat{\nu} = \widehat{\mu*\nu}$ となるからである. $E[e^{i\langle z,X+Y\rangle}] = E[e^{i\langle z,X\rangle}]E[e^{i\langle z,Y\rangle}] = \widehat{\mu}(z)\widehat{\nu}(z)$.

ちなみに, 特性関数を用いて元の分布を表すことができる (**Lévy の反転公式**) ので, $\mu \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^d)$ と $\widehat{\mu}$ は 1 対 1 に対応する. つまり, $\mu,\nu \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^d)$ に対し, $\widehat{\mu} = \widehat{\nu}$ なら, $\mu = \nu$ (**一意性定理**).

更に, 特性関数の収束と分布の収束についても, 以下の結果を述べておく. (これらの証明については, 講義ノート「確率論の基礎」を参照してもらいたい.)

定理 2.4 $\mu_n, \mu \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^d)$ に対し, $\mu_n \to \mu$ なら $\widehat{\mu}_n \to \widehat{\mu}$ (広義一様)

但し, $\mu_n \to \mu \overset{\text{def}}{\iff} {}^\forall f \in C_b(\mathbf{R}^d)$, $\mu_n(f) := \int f d\mu_n \to \mu(f)$.

定理 2.5 (Lévy の連続性定理) $\mu_n \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^d)$ とする. ${}^{\exists}\varphi; \widehat{\mu}_n \to \varphi$ (各点収束) かつ, φ が原点で連続なら ${}^{\exists}\mu \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^d)$; $\varphi = \widehat{\mu}$, $\mu_n \to \mu$, しかも $\widehat{\mu}_n \to \widehat{\mu}$ (広義一様).

系 2.1 (Glivenko の定理) $\mu_n, \mu \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^d)$ に対し, $\widehat{\mu}_n \to \widehat{\mu}$ (各点収束) なら, $\mu_n \to \mu$.

3 Lévy 過程と無限分解可能分布

Lévy 過程の分布は無限分解可能という性質を持つ. この性質により, その特性関数の特徴づけとして, Lévy-Khintchine の標準形を与えることができる.

3.1 無限分解可能分布

$\mathbf{R}^d$ 上の確率測度, つまり, 分布の全体を $\mathcal{P}(\mathbf{R}^d)$ で表す.

定義 3.1 $\mu \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^d)$ が**無限分解可能分布 (infinitely divisible distribution)** であるとは, ${}^\forall n \geq 2, {}^\exists \mu_n \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^d) : \mu = \mu_n^{n*}$. この分布全体を $I(\mathbf{R}^d)$ で表す.

これは, 特性関数を $\widehat{\mu}$ で表せば, ${}^\forall n \geq 2$ に対し, $\widehat{\mu}^{1/n}$ が特性関数となることと同値である. (ここで, n 乗根は, 下に述べる意味である.)

一様分布, 二項分布は無限回分解可能ではない. また, 台が有界な無限分解可能分布は δ 分布のみである.

以下に, 無限分解可能分布の簡単に分かる性質をいくつか挙げる.

・$\mu \in I(\mathbf{R}^d)$ なら, $\widehat{\mu} \neq 0$, i.e., 零点を持たない.

[証] 定義より, $\widehat{\mu_n}^n = \widehat{\mu}$ なので,

$$\varphi(z) := \lim_{n\to\infty} |\widehat{\mu_n}(z)|^2 = \lim_{n\to\infty} |\widehat{\mu}(z)|^{2/n} = 1_{\{\widehat{\mu}(z)\neq 0\}}.$$

また, $\mu_-(dx) := \mu(-dx)$: μ の**双対**, $\mu_2 := \mu * \mu_-$: μ の**対称化**とおけば, $\widehat{\mu_-} = \widehat{\mu}(-\cdot) = \overline{\widehat{\mu}}$, $\widehat{\mu_2} = |\widehat{\mu}|^2$ となるので, φ は特性関数の極限. $\widehat{\mu}(0) = 1$ で, $z = 0$ の近傍では, $\varphi = 1$ となり, Lévy の連続性定理より, φ も特性関数で, 連続. 上の式から, 結局, $\varphi \equiv 1$ となり, $\widehat{\mu} \neq 0$.

・$\mu \in I(\mathbf{R}^d)$ なら, 上のことから, ${}^{\exists_1} f(z) : \mathbf{R}^d \to \mathbf{C}$: 連続; $f(0) = 0, \widehat{\mu}(z) = e^{f(z)}$, かつ, ${}^\forall n \geq 1, {}^{\exists_1} g_n(z) : \mathbf{R}^d \to \mathbf{C}$: 連続; $g_n(0) = 1, g_n(z)^n = \widehat{\mu}(z)$ が言えるので, 以下, $f = \log \widehat{\mu}$, $g_n = \widehat{\mu}^{1/n}$ と表す. ($g_n = e^{f/n}$ である.) これにより, $\widehat{\mu}^t = \exp[t \log \widehat{\mu}]$ と定義し, これが特性関数の時 (後で示すように, 実際そうなるが), その分布を μ^{t*} と表す. このとき, $\widehat{\mu^{t*}} = \widehat{\mu}^t$.

[証] これは $\widehat{\mu}$ を一般に $\varphi : \mathbf{R}^d \to \mathbf{C}; \varphi \neq 0, \varphi(0) = 1$ に変えて, 成り立つのでそれで示す. $z \in \mathbf{R}^d$ を固定し, $t \in [0,1]$ に対し, $\varphi(tz)$ の複素対数関数の枝 $h_z(t) = \log|\varphi(tz)| + i \arg \varphi(tz)$ を連続かつ $h_z(0) = 0$ と選ぶ. $h_z(t)$ は一意的で, $\arg \varphi(tz)$ は $t = 0$ のとき, 0 として連続に選んだ偏角である. $f(z) = h_z(1) = \log|\varphi(z)| + i \arg \varphi(z)$ と定義して, この連続性を示す. z_0 を固定し, $z \neq z_0$ に対し, $w_z(t) : [0,3] \to \triangle(0, z_0, z)$ を $t = 0,1,2,3$ に対し, $w_z(t) = 0, z_0, z, 0$ でその間を線分で繋いだものとする. $\{\varphi(tz_0); t \in [0,1]\}$ がコンパクトで, $\varphi \neq 0$ より, 0 との間に距離を持つ. $z \to z_0$ のとき, $\max_{0\leq t\leq 1} |\varphi(tz) - \varphi(tz_0)| \to 0$. 従って, ${}^\exists U(z_0)$: z_0 の近傍; ${}^\forall z \in U(z_0)$, 閉曲線 $\{\varphi(w_z(t)); t \in [0,3]\}$ の原点の周りの回転数は 0 となり, $\arg \varphi(w_z(3)) = 0$ となる. よって, $\operatorname{Im} f(z) = \arg \varphi(z) = \arg \varphi(w_z(2))$ (${}^\forall z \in U(z_0)$) で, $z \to z_0$ なら $\operatorname{Im} f(z) \to \operatorname{Im} f(z_0)$. $\operatorname{Re} f(z)$ の連続性は明らかなので, $f(z)$ は連続. また $\widetilde{f}(z)$ 連続; $\widetilde{f}(0) = 0, e^{\widetilde{f}(z)} = \varphi(z)$ とすると, h_z の一意性より, $h_z(t) = \widetilde{f}(tz)$ で, $\widetilde{f}(z) = h_z(1) = f(z)$. $\widehat{\mu}$ の n 乗根 g_n についても同様に示せる. ■

・$\mu \in I(\mathbf{R}^d)$ のとき, $\mu = \mu_n^{n*}$ なる分布 μ_n は一意で, $\widehat{\mu_n} = \widehat{\mu}^{1/n}$, 即ち, $\mu_n = \mu^{1/n*}$.

[証] $\widehat{\mu} \neq 0$ と上の証明の結果から明らか. ■

・$\mu_n \in I(\mathbf{R}^d) \to \mu$ なら, $\mu \in I(\mathbf{R}^d)$.

[証] $^\forall k \geq 2$ に対し, $\widehat{\mu}^{1/k}$ も特性関数を示せば良い. まず $\widehat{\mu} \neq 0$ を示す. $\widehat{\mu}_n \to \widehat{\mu}$ より, $|\widehat{\mu}_n|^{2/k} \to |\widehat{\mu}|^{2/k}$. $|\widehat{\mu}_n|^{2/k} = |\widehat{\mu}_n^{1/k}|^2$ で, これは特性関数で, $|\widehat{\mu}|^{2/k}$ が連続なので, これも特性関数. よって, $|\widehat{\mu}|^2$ を特性関数とする分布は無限分解可能分布. 故に, $\widehat{\mu} \neq 0$ よって上で示したように, $\widehat{\mu}^{1/k}$ が一意に存在し, 連続で, $\widehat{\mu_n} \to \widehat{\mu}$ なので, $\widehat{\mu_n}^{1/k} \to \widehat{\mu}^{1/k}$. よって, $\widehat{\mu}^{1/k}$ も特性関数. ■

- $\mu_1, \mu_2 \in I(\mathbf{R}^d)$ なら, $\mu_1 * \mu_2 \in I(\mathbf{R}^d)$.

  [証] $\mu_1 = (\mu_{1,n})^{n*}, \mu_2 = (\mu_{2,n})^{n*}$ より, $\mu_1 * \mu_2 = (\mu_{1,n} * \mu_{2,n})^{n*}$. ■

- $\mu \in I(\mathbf{R}^d)$ なら, $^\forall t \geq 0, \mu^{t*}$ が定義され, $\mu^{t*} \in I(\mathbf{R}^d)$.

  [証] $\widehat{\mu}^{1/m} = (\widehat{\mu}^{1/(mn)})^n \in I(\mathbf{R}^d)$. よって, $\widehat{\mu}^{n/m} \in I(\mathbf{R}^d)$. $r_n \in \mathbf{Q}_+ \to t > 0$ をとれば, $\widehat{\mu}^{r_n} \to \widehat{\mu}^t$, かつ, $\widehat{\mu}^t$ は連続なので, $^{\exists_1}\mu_t \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^d); \widehat{\mu}_t = \widehat{\mu}^t$. 従って, $\mu^{t*} \in I(\mathbf{R}^d)$. ■

定理 3.1 (X_t) を法則の意味の Lévy 過程とすると, X_t の分布 $\mu_t = P \circ X_t^{-1} \in I(\mathbf{R}^d)$ で, $\mu_1 = \mu$ と表すと, $\mu_t = \mu^{t*}$. 逆に, $\mu \in I(\mathbf{R}^d)$ があるとき, $^\exists(X_t)$ 法則の意味の Lévy 過程が存在し, $X_t \overset{(\mathrm{d})}{=} \mu^{t*}$. しかも, 法則同等を除いて一意. 即ち, (Y_t) も同じ条件を満たせば, (X_t) と法則同等, i.e., 有限次元分布が等しい; $(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}) \overset{(\mathrm{d})}{=} (Y_{t_1}, Y_{t_2}, \ldots, Y_{t_n})$.

[証明] $t > 0$ に対し, $t_k^n = kt/n$ とすれば, $t_0^n = 0$ で, $X_0 = 0$ より, $X_t = \sum_{k=1}^n (X_{t_k^n} - X_{t_{k-1}^n})$ で, 独立増分性より, $\mu_t \in I(\mathbf{R}^d)$ は明らか. $X_1 \overset{(\mathrm{d})}{=} \mu = \mu_1 \in I(\mathbf{R}^d)$ より, $X_{1/n} \overset{(\mathrm{d})}{=} \mu_{1/n} = \mu^{1/n*}$ で, $X_{m/n} \overset{(\mathrm{d})}{=} \mu^{m/n*}$ なので, 有理数で近似すれば, $^\forall t > 0, X_t \overset{(\mathrm{d})}{=} \mu^{t*}$.

逆に, $\mu \in I(\mathbf{R}^d)$ に対応する法則の意味の Lévy 過程があることをいうには, 証明の後に述べる Kolmogorov の拡張定理を用いる. $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, $B_k \in \mathcal{B}^d$, $k = 1, 2, \ldots, n$ に対し,

$$\begin{aligned}&\mu_{t_1,\ldots,t_n}(B_1 \times \cdots \times B_n)\\ &:= \int_{\mathbf{R}^d} \mu^{t_1*}(dy_1) 1_{B_1}(y_1) \int_{\mathbf{R}^d} \mu^{t_2-t_1*}(dy_2) 1_{B_2}(y_1+y_2) \cdots \int_{\mathbf{R}^d} \mu^{t_n-t_{n-1}*}(dy_n) 1_{B_n}(y_1+\cdots+y_n)\end{aligned}$$

と定義する. $\mu^{s*} * \mu^{t*} = \mu^{s+t*}$ から, これが両立条件を満たすことが分かるので, $^{\exists_1}P$: 確率測度 on $\Omega = (\mathbf{R}^d)^{[0,\infty)}$; $X_t(\omega) := \omega(t)$ に対し, $X_t \overset{(\mathrm{d})}{=} \mu^{t*}$. しかも,

$$E\left[e^{i\sum_{k=1}^n \langle z_k, X_{t_k} - X_{t_{k-1}} \rangle}\right] = \prod_{k=1}^n \int_{\mathbf{R}^d} e^{i\langle z_k, y_k \rangle} \mu^{t_k - t_{k-1}*}(dy_k) = \prod_{k=1}^n E\left[e^{i\langle z_k, X_{t_k} - X_{t_{k-1}} \rangle}\right]$$

となり, 独立増分性を得る. 最後の等号は, その前の等式で, 各 k に対し, z_k 以外を 0 とすれば良い. また, 確率連続性は $t \downarrow 0$ のとき,

$$P(|X_t| \geq \varepsilon) \to 0 \iff \mu_t \to \delta_0 \iff \widehat{\mu}(z)^t \to 1$$

で $\mu \in I(\mathbf{R}^d)$ は零点を持たないので, 明らか. 最後に, (Y_t) も同じ条件を満たせば, $X_t - X_s \overset{(\mathrm{d})}{=} Y_t - Y_s \overset{(\mathrm{d})}{=} \mu^{t-s*}$ で, 更に, 上の式の前半から, $(X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}) \overset{(\mathrm{d})}{=} (Y_{t_0}, Y_{t_1} - Y_{t_0}, \ldots, Y_{t_n} - Y_{t_{n-1}})$. 更に, $(X_{t_0}, X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \overset{(\mathrm{d})}{=} (Y_{t_0}, Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_n})$. ■

定理 3.2 (Kolmogorov の拡張定理) $\Omega = (\mathbf{R}^d)^{[0,\infty)} \ni \omega$, $X_t(\omega) := \omega(t)$ に対し, $\mathcal{F}$ を Kolmogorov の σ 加法族, 即ち, 筒集合 $C = \{X_{t_k} \in B_k, k =, 1, \ldots, n\}$ の全体から生成される σ-加法族とする. $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ に対し, $\mathcal{B}((\mathbf{R}^d)^n)$ 上の分布 $\mu_{t_1,\ldots,t_n}$ が与えられていて, 次の両立条件を満たすとする: $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}^1$ とある $k = 1, 2, \ldots, n$ に対し, $B_k = \mathbf{R}^d$ のとき,

$$\mu_{t_1,\ldots,t_n}(B_1 \times \cdots \times B_n) = \mu_{t_1,\ldots,t_{k-1},t_{k+1},\ldots,t_n}(B_1 \times \cdots \times B_{k-1} \times B_{k+1} \times \cdots \times B_n)$$

このとき, $^\exists P$: 確率測度 on $(\Omega, \mathcal{F})$; $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \overset{(\mathrm{d})}{=} \mu_{t_1,\ldots,t_n}$.

これの証明は, 筒集合の全体 $\mathcal{C}$ 上に, $C = \{X_{t_k} \in B_k, k =, 1, \ldots, n\} \in \mathcal{C}$ に対し, $Q(C) := \mu_{t_1,\ldots,t_n}(B_1 \times \cdots \times B_n)$ と定義すれば, $Q : \mathcal{C} \to [0,1]$; $Q((\mathbf{R}^d)^{[0,\infty)}) = 1$ で, 有限加法性を満たす. 後は, 連続性 $A_n \in \mathcal{C}; A \downarrow \emptyset$ に対し, $Q(A_n) \to 0$ を示せば, 測度の拡張定理により, $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{C})$ 上の確率測度 P が一意に存在し, $P = Q$ on $\mathcal{C}$ となる. 連続性についても, 背理法で, $Q(A_n) \downarrow \delta > 0$ として, 分布 $\mu_{t_1,\ldots,t_n}$ の正則性を用いて, $B_1 \times \cdots \times B_n$ に含まれる cpt 集合を取ることによって, $\bigcap A_n \neq \emptyset$ が示せるので, 矛盾となる. 詳細については, I. カラザス, S. E. シュレーブ　著「ブラウン運動と確率積分」シュプリンガー (2001) の p53 を参照.

3.2 Lévy-Khintchine の標準形

定理 3.3 (X_t) が Lévy 過程であることは, $^\forall t \geq 0$, X_t の特性関数 $\widehat{\mu_t}(z) := E[e^{i\langle z, X_t\rangle}]$ $(i = \sqrt{-1})$ が次の **Lévy-Khintchine の標準形** を持つことと同値となる. $\widehat{\mu_t}(z) = e^{t\psi(z)}$;

$$\psi(z) = -\frac{1}{2}\langle Az, z\rangle + + \int_{\mathbf{R}^d} (e^{i\langle z,x\rangle} - 1 - i\langle z, x\rangle 1_{\{|x|<1\}})\nu(dx) + i\langle \gamma, z\rangle.$$

ここで,

・$A = (a_{jk})_{j,k\leq d}$ は非負定値対称行列.

このとき, $^\exists \sigma = (\sigma_\ell^j)_{\ell\leq m, j\leq d}$; $a_{jk} = \sum_{\ell\leq m} \sigma_\ell^j \sigma_\ell^k$ と表されることと同値である. ($\to$ 問)

・$\nu = \nu(dx)$ は **Lévy 測度** と呼ばれる $\mathbf{R}^d$ 上の測度で, $\nu(\{0\}) = 0$, $\displaystyle\int_{\mathbf{R}^d} (1 \wedge |x|^2)\nu(dx) < \infty$ を満たす.

・$\gamma = (\gamma_j)_{j\leq d} \in \mathbf{R}^d$,

この表現の 3 つ組 (A, ν, γ) は一意的に定まる.

ちなみに, もし, ν が $\displaystyle\int_{|x|\leq 1} |x|\nu(dx) < \infty$ を満たすなら,

$$\psi(z) = -\frac{1}{2}\langle Az, z\rangle + \int_{\mathbf{R}^d} (e^{innz,x} - 1)\nu(dx) + i\langle \gamma_0, z\rangle.$$

但し, $\gamma_0 = \gamma - \displaystyle\int_{|x|<1} x\nu(dx)$ で, このとき, γ_0 は, **ずれ (drift)** と呼ばれる.

問　上の A の表現を示せ.

A を対角化する直交行列を $U = (u_{jk})$, 固有値を $\lambda_k \geq 0$ $(k \leq d)$ とすれば, ${}^tUAU = \mathrm{diag}\ (\lambda_\ell)$, i.e., $A = U\mathrm{diag}\ (\lambda_\ell)^tU$ より, $a_{jk} = \sum_{\ell\leq d} \lambda_\ell u_{j\ell} u_{k\ell}$ となる. よって, 固有値の内, 正のものが m 個, i.e., $\ell \leq m$ に対し, $\lambda_{k_\ell} > 0$ として, 各 $j \leq d$ に対し, $\sigma_\ell^j = \sqrt{\lambda_{k_\ell}} u_{jk_\ell}$ とおけば $a_{jk} = \sum_{\ell\leq m} \sigma_\ell^j \sigma_\ell^k$ となる.

上の定理は, 無限分解可能分布 μ の言葉で言い換えれば, 次のようになる.

$$\mu \in I(\mathbf{R}^d) \iff \widehat{\mu}(z) = e^{\psi(z)}$$

複合 Poisson 分布の特性関数では

$$\psi(z) = \log \widehat{\mu}(z) = c(\widehat{\sigma} - 1) = c\int_{\mathbf{R}^d} (e^{i\langle z,x\rangle} - 1)\sigma(dx)$$

において, $A = 0$, $\nu = c\sigma$, $\gamma = c\displaystyle\int_{|x|<1} x\sigma(dx)$ とおけば, 標準形を得る.

[標準形の証明]

まず, この形の特性関数 $\varphi = e^{\psi}$ をもつ分布が存在し, 無限分解可能分布であることは, 大きさ $1/n$ 以下の跳びを除いたものは, Gauss 分布と複合 Poisson 分布の畳み込みとなるので, 無限分解可能分布で, その特性関数 $\widehat{\mu}_n \to \varphi$ で, φ は連続なので, 特性関数で, $^{\exists_1}\mu \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^d); \widehat{\mu} = \varphi$. よって, $\mu_n \to \mu$ となり, μ も無限分解可能分布.

次に**表現の一意性** について. $\psi(z) = \log\varphi(z)$ が (A, ν, γ) による標準形で表されているとする.

$$\frac{1}{s^2}|e^{i\langle sz,x\rangle} - 1 - i\langle sz, x\rangle| \le \frac{1}{2}|z|^2|x|^2, \quad \to 0\ (s \to \infty)$$

より, Lebesgue の収束定理を用いて

$$\lim_{s\to\infty}\frac{1}{s^2}\psi(sz) = -\frac{1}{2}\langle z, Az\rangle.$$

これから, A は, μ から定まるので, 一意である.

次に $\psi_d(z) = \psi(z) + \langle z, Az\rangle/2$ とおき, $C = [-1, 1]^d$ とすると,

$$\int_C (\psi_d(z) - \psi_d(z+w))dw = \int_{\mathbf{R}^d} e^{i\langle z,x\rangle}\rho(dx), \quad \rho(dx) = 2^d\left(1 - \prod_{j=1}^d \frac{\sin x_j}{x_j}\right)\nu(dx)$$

が示せる. これと $\rho(dx) \le C(1 \wedge |x|^2)\nu(dx)$ より ($\to$ 問), ρ は有限測度で, その Fourier 変換が上の左辺となる. 従って, ρ は ψ_d から一意に, つまり, ν が μ から一意に定まることになる. よって γ も一意となる. 上の変換式については, $D = \{|x| < 1\}$ として,

$$\int_C (\psi_d(z) - \psi_d(z+w))dw = \int_C dw \int_{\mathbf{R}^d} (e^{i\langle z,x\rangle} - e^{i\langle z+w,x\rangle} + i\langle w, x\rangle 1_D(x))\nu(dx)$$

で, D 上では, $i\langle w, x\rangle e^{i\langle z,x\rangle}$ を加えて, 引けば,

$$|e^{i\langle z,x\rangle} - e^{i\langle z+w,x\rangle} + i\langle w,x\rangle| \le |1 - e^{i\langle w,x\rangle} + i\langle w,x\rangle)| + |i\langle w,x\rangle(e^{i\langle z,x\rangle} - 1)| \le \frac{1}{2}|w|^2|x|^2 + |w||z||x|^2$$

より, dw と $\nu(dx)$ の積分の交換ができる. しかも,

$$\int_C (e^{i\langle z,x\rangle} - e^{i\langle z+w,x\rangle} + i\langle w,x\rangle 1_D(x))dw = e^{i\langle z,x\rangle}\int_C (1 - e^{i\langle w,x\rangle})dw = 2^d e^{i\langle z,x\rangle}\left(1 - \prod_{j=1}^d \frac{\sin x_j}{x_j}\right)$$

より求める式を得る.

問 3.1 $|x| \le 1$ のとき, $1 - \prod_{j=1}^d \frac{\sin x_j}{x_j} \le C|x|^2$ を示せ.

$x > 0$ なら $\sin x \ge x - x^3/3!$ なので, $d = 1$ なら明らか. 一般も次から言える.

$$1 - \prod_{j=1}^d \frac{\sin x_j}{x_j} = \sum_{k=1}^d \left(1 - \frac{\sin x_k}{x_k}\right)\prod_{j=1}^{k-1}\frac{\sin x_j}{x_j}$$

最後に, **表現可能について**: 複合 Poisson 分布 μ_n を

$$\widehat{\mu_n}(z) := \exp[n(\widehat{\mu}(z)^{1/n} - 1)] = \exp\left[n\int_{\mathbf{R}^d\setminus\{0\}} (e^{iz\cdot x} - 1)\mu^{1/n*}(dx)\right]$$

で定義すれば, ($\mu^{1/n*}(\{0\}) = 0$ とは限らないが, これを $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ に制限したものを, ν_n とおいて上で置き換えて良く, 複合 Poisson となることに注意.) $n \to \infty$ のとき,

$$\widehat{\mu_n}(z) = \exp[n(e^{n^{-1}\log\widehat{\mu}(z)} - 1)] = \exp[n(n^{-1}\log\widehat{\mu}(z) + o(1/n)] \to \widehat{\mu}(z)$$

より, $\mu_n \to \mu$. μ_n は標準形で表されて, 次の次に述べる標準形の収束定理より, μ も標準形で表される. ■

上の証明から, 次がすぐ言える.

定理 3.4 無限分解可能分布は複合 Poisson 分布の極限として表される.

標準形のままでは扱い辛いので, 次の**第 2 標準形**を与える. $\theta(x)$ を $\mathbf{R}^d$ 上の関数で, $|x| \le 1$ で 1, $|x| \ge 2$ では 0 でその間を $|x|$ に対し, 線分で繋いだグラフをもつ連続関数とする.

$$\psi(z) = -\frac{1}{2}\langle Az, z\rangle + \int_{\mathbf{R}^d}(e^{i\langle z,x\rangle} - 1 - i\langle z, x\rangle\theta(x))\nu(dx) + i\langle\beta, z\rangle.$$

当然, 標準形と第 2 標準形は同値で, 互いに書き換え可能である.

定理 3.5 (標準形の収束定理) $\mu_n \in I(\mathbf{R}^d)$ が (A_n, ν_n, β_n) による第 2 標準形をもつとき, $\mathbf{R}^d$ 上の分布 μ に対し, $\mu_n \to \mu$ と次は同値.

$\mu \in I(\mathbf{R}^d)$ は (A, ν, β) による第 2 標準形をもち, 原点の近傍で 0 である有界連続関数 f に対し,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}^d} f(x)\nu_n(dx) = \int_{\mathbf{R}^d} f(x)\nu(dx).$$

更に, $^\forall\varepsilon > 0$, 非負定値対称行列 $A_{n,\varepsilon}$ を $\langle z, A_{n,\varepsilon}z\rangle = \langle z, A_n z\rangle + \int_{|x|<\varepsilon}\langle x, z\rangle^2\nu_n(dx)$ で定義すると, $^\forall z \in \mathbf{R}^d$, $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\limsup_{n\to\infty}\langle z, A_{n,\varepsilon}z\rangle = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\liminf_{n\to\infty}\langle z, A_{n,\varepsilon}z\rangle = \langle z, Az\rangle$. $\lim_{n\to\infty}\beta_n = \beta$.

[証明] ($\Rightarrow$) μ_n が第 2 標準形をもち, $\mu_n \to \mu$ なら, μ もそうで, 各係数に関する上の収束が成り立つことを示そう. まず $\mu \in I(\mathbf{R}^d)$ となり, $\widehat{\mu}(z)$ が零点をもたないので, $\psi(z) = \log\widehat{\mu}(z)$ が存在し, 特性関数の収束より, $\psi_n(z) = \log\widehat{\mu}_n(z) \to \psi(z)$ (広義一様) となる.

$g(z, x) := e^{i\langle z,x\rangle} - 1 - i\langle z, x\rangle\theta(x)$ とおくと,

$$\psi_n(z) = -\frac{1}{2}\langle A_n z, z\rangle + \int_{\mathbf{R}^d} g(z, x)\nu_n(dx) + i\langle\beta_n, z\rangle.$$

ここで $\rho_n(dx) := (1 \wedge |x|^2)\nu_n(dx)$ とおくと,

$$\sup_n \rho_n(\mathbf{R}^d) < \infty, \quad \lim_{L\to\infty}\sup_n \rho_n(|x| > L) = 0 \tag{3.1}$$

が成り立つことが言える. これは確率測度の族の場合は「緊密」(tight) に相当する条件で, 相対コンパクトと同値となるが, 有限測度の場合も同様で, $^\exists\{n_k\}; \rho_{n_k} \to {}^\exists\rho$: 有限測度. そこで, $\nu(dx) := (1 \wedge |x|^2)^{-1}1_{\{x\ne 0\}}\rho(dx)$ とおく. $\varepsilon > 0$ に対し,

$$I^\varepsilon_{1,n}(z) := \int_{|x|\ge\varepsilon} g(z, x)(1 \wedge |x|^2)^{-1}\rho_n(dx),$$

$$I^\varepsilon_{2,n}(z) := \int_{|x|<\varepsilon}(g(z, x) + \frac{1}{2}\langle z, x\rangle^2)(1 \wedge |x|^2)^{-1}\rho_n(dx)$$

とおけば,

$$\psi_n(z) = -\frac{1}{2}\langle A_{n,\varepsilon}z, z\rangle + I^{\varepsilon}_{1,n}(z) + I^{\varepsilon}_{2,n}(z) + i\langle \beta_n, z\rangle.$$

次で, n は n_k を表すとして $n \to \infty$, (i.e., $k \to \infty$) へ動かし, ρ 連続な $\varepsilon > 0$, i.e, $\rho(|x| = \varepsilon) = 0$ (正確には $\{|x| < \varepsilon\}$ が ρ 連続集合ということであるが,) として, $\varepsilon \downarrow 0$ とすると,

$$I^{\varepsilon}_{1,n}(z) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{|x|\ge\varepsilon} g(z,x)\nu(dx) \xrightarrow[\varepsilon\downarrow 0]{} \int_{\mathbf{R}^d} g(z,x)\nu(dx). \tag{3.2}$$

また, $^{\forall}z$, $\left|g(z,x) + \langle z,x\rangle^2/2\right|(1\wedge|x|^2)^{-1} \le |z|^3|x|/3! \to 0$ ($|x| < \varepsilon \to 0$) なので, $\sup_n \rho_n(\mathbf{R}^d) < \infty$ より,

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\sup_n |I^{\varepsilon}_{2,n}(z)| = 0.$$

よって, $\psi_n(z)$ の実部, 虚部を分けて考えれば

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\limsup_{k\to\infty}\langle z, A_{n_k,\varepsilon}z\rangle = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\liminf_{k\to\infty}\langle z, A_{n_k,\varepsilon}z\rangle \in \mathbf{R},$$

$$\limsup_{k\to\infty}\langle \beta_{n_k}, z\rangle = \liminf_{k\to\infty}\langle \beta_{n_k}, z\rangle \in \mathbf{R}$$

で, それぞれ, $^{\exists}A; \langle z, Az\rangle$, $^{\exists}\beta; \langle\beta, z\rangle$ と表せる. ($\to$ 問) これにより, $\psi(z)$ が (A,ν,β) による第 2 標準形で表せて, 一意である. また係数の収束は, 部分列 $\{n_k\}$ と ρ 連続な ε に対してだが, まず, ε の条件は, 積分の単調性から外せて, 更に, ψ の表現の一意性から $\{\rho_n\}$ の任意の部分列に対し, 収束する部分列をとるとその極限は ρ となり, 結局, 部分列を取らなくても $\rho_n \to \rho$ となる. 従って, 全ての係数の収束が元の n のままで言える.

後は, (3.1) を示せば良い. $C(h) = [-h,h]^d$ として, $A_n = (a^{(n)}_{jk})$ とすると,

$$\begin{aligned}
-\int_{C(h)}\psi_n(z)dz &= \frac{1}{2}\sum_{j\le d}a^{(n)}_{jj}\int_{C(h)}z_j^2dz - \int_{\mathbf{R}^d}\nu_n(dx)\int_{C(h)}g(z,x)dz \\
&= \frac{1}{3}2^{d-1}h^{d+2}\sum_{j\le d}a^{(n)}_{jj} + (2h)^d\int_{\mathbf{R}^d}\left(1 - \prod_{j=1}^d\frac{\sin hx_j}{hx_j}\right)\nu_n(dx) \ge 0.
\end{aligned}$$

固定した $h > 0$ に対し, $n \to \infty$ とすれば, (左辺) $\to -\int_{C(h)}\psi(z)dz$ に収束するので, 有界. 更に,

$$\inf_x\left(1 - \prod_{j=1}^d\frac{\sin hx_j}{hx_j}\right)(1\wedge|x|^2)^{-1} > 0$$

なので ($\to$ 問), $\{\rho_n\}$ の一様有界性; $\sup_n \rho_n(\mathbf{R}^d) < \infty$ が成り立つ. $h \downarrow 0$ のとき, 上の計算と問 3.1 により,

$$\frac{1}{(2h)^d}\int_{C(h)}\psi_n(z)dz \to 0$$

なので $^{\forall}\varepsilon > 0, {}^{\exists}n_0, h_0; {}^{\forall}n \ge n_0$,

$$\int_{\mathbf{R}^d}\left(1 - \prod_{j=1}^d\frac{\sin h_0x_j}{h_0x_j}\right)\nu_n(dx) < \varepsilon.$$

$|x| > 2\sqrt{d}/h_0$ なら, $^{\exists}j_0; |x_{j_0}| > 2/h_0$ より,

$$1 - \prod_{j=1}^d\frac{\sin h_0x_j}{h_0x_j} \ge 1 - \left|\frac{\sin h_0x_{j_0}}{h_0x_{j_0}}\right| \ge 1 - \frac{1}{h_0|x_{j_0}|} > \frac{1}{2}$$

に注意すると, $h_0 > 0$ は十分小だとして良いので,

$$\rho_n\left(|x| > 2\sqrt{d}/h_0\right) = \frac{1}{2}\nu_n\left(|x| > 2\sqrt{d}/h_0\right) < \varepsilon \quad (n \geq n_0).$$

以上で (3.1) が示された.

($\Leftarrow$) 係数の収束から, $\mu_n \to \mu$ を示す. ρ_n を上と同じで, $\rho(dx) = (1 \wedge |x|^2)\nu(dx)$ と定義する. $\varepsilon > 0$ を ρ 連続として, $\varepsilon \downarrow 0$ として動かせば, ν_n の収束の仮定から, $I^{\varepsilon}_{1,n}(z)$ の収束; (3.2) が成り立つ. また, ν_n と $A_{n,\varepsilon}$ の収束の仮定から, ρ_n の一様有界性が言えて, これから $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\sup_n |I^{\varepsilon}_{2,n}(z)| = 0$ も成り立つ. 従って, $\psi_n(z)$ の実部, 虚部の極限を考えることにより, $\psi_n(z) \to \psi(z)$, i.e., $\widehat{\mu}_n(z) \to \widehat{\mu}(z)$ となり, 結論を得る. ■

問 3.2 A_n が非負定値で, ${}^\forall z, {}^\exists \lim\langle z, A_n z\rangle$ なら, ${}^\exists A$: 非負定値; $\lim\langle z, A_n z\rangle = \langle z, Az\rangle$ を示せ.

問 3.3 次を示せ.

$$\inf_x \left(1 - \prod_{j=1}^d \frac{\sin hx_j}{hx_j}\right)(1 \wedge |x|^2)^{-1} > 0 \ ({}^\forall h > 0), \qquad \frac{1}{(2h)^d}\int_{C(h)} \psi_n(z)dz \to 0 \ (h \downarrow 0).$$

後半は, ルベーグの収束定理より. 前半は, 本質的には, 原点付近では, $1 - \sin x/x$ が x 2 のオーダーで, 原点の近傍を除けば, 正の定数で下から抑えられることによる. 実際, $hx = y$ と変換して, $d = 1$ のとき,

$$\left(1 - \frac{\sin hx}{hx}\right)(1 \wedge |x|^2)^{-1} = \left(1 - \frac{\sin y}{y}\right)\left(1 \vee \frac{h^2}{|y|^2}\right)$$

$t > 0$ なら $\sin t \leq t - t^3/3! + t^5/5!$ より, $|\sin y/y| \leq 1 - y^2/3! + y^4/5!$ で, まず, $|y| < 1$ なら,

$$1 - \frac{\sin y}{y} \geq \frac{y^2}{3!} - \frac{y^4}{5!}, \geq \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{5!}\right)y^2 =: C_0 y^2, \text{ より}, \quad (\text{与式}) \geq C_0 y^2 \cdot \frac{h^2}{y^2} = C_0 h^2.$$

$|y| \geq 1$ なら, (与式)$\geq (1 - \sin 1)\cdot 1$. また, $d \geq 2$ のときは, $|y| < 1$ なら上の計算と, 問 3.1 と同様に積の項を 1 つずつ増やして行けば, $\sin y_j/y_j \geq \sin 1$ に注意して, (与式)$\geq \sin^{d-1} 1 \cdot C_0 h^2$. $|y| \geq 1$ なら, ${}^\exists j; |y_j| \geq 1/\sqrt{d} =: \delta_d$ と他は $|\sin y_k/y_k| \leq 1$ より,

$$(\text{与式}) \geq \left(1 - \frac{|\sin y_j|}{|y_j|}\right)\cdot 1 \geq 1 - \frac{\sin \delta_d}{\delta_d} > 0.$$

ここで, $t > 0$ なら $|\sin t/t|$ は $0+$ で 1 をとり, $t \leq \pi/2$ までは単調減少, さらにその先での最大値は $2/\pi$ となる.

(参考) $\sin t/t$ $(t > 0)$ について. $t = 0+$ で 1 だが, 原点の近傍を除けば, 1 より小さい値以下となる実際, $(\sin t/t)' = (t\cos t - \sin t)/t^2$ で, $0 < t < \pi/2$ なら (分子)$= \cos t(t - \tan t)$ で, $t < \tan t$ より, 狭義単調減少. $\pi/2 < t < \pi$ でも負なので同様. $\pi < t < 3\pi/2$ なら, $\cos t$ は負で, $\tan t$ が 0 から無限大まで変化するので, ある $t_0 \in (\pi, 3\pi/2)$ で, 負から正に変化する. 従って, そこから先 $t \geq \pi$ では $|\sin t/t|$ の最大値は, $-\sin t_0/t_0 \leq 1/t_0 < 1/\pi < 1/3$ となる.

4 Lévy 過程の重要な例

第 2 節で, 基本的な例は述べたが, 更に, 重要な例として, 安定過程と L 過程（自己分解可能過程）について述べる.

4.1 安定過程と安定分布

Brown 運動の Lévy 過程への拡張として, 指数 $0<\alpha\le 2$ の狭義安定過程というものが, 考えられる. これは Brown 運動と同じタイプのスケーリング性をもつが, その時の指数が 2 から α に一般化されたものである, i.e., $X_t \overset{(d)}{=} t^{1/\alpha}X_1$. $\alpha=2$ の時が, 平均 0 の Gauss 過程となる. 更に, スケーリングにずれも許し, 拡張したものが単に, 安定過程と呼ばれる. また, これらの分布はそれぞれ, 狭義安定分布, 安定分布と呼ばれる.

定義 4.1 $\mathbf{R}^d$ 上の確率過程 $(X_t)_{t\ge 0}$ が**安定過程 (stable process)** であるとは, Lévy 過程であって, 次を満たすときをいう.

$$^\forall a>0, {}^\exists b>0, c\in\mathbf{R}^d;\quad (X_{at}) \text{ と } (bX_t+ct) \text{ が法則同等, i.e., 有限次元分布が等しい}$$

また, $c=0$ として取れるとき, **狭義安定過程 (strictly stable process)** という.
また, このとき, X_1 の分布をそれぞれ, **安定分布, 狭義安定分布**という.

$X_t=\gamma t$ a.s. のとき, これを**自明な Lévy 過程**という. 明らかにこれは狭義安定過程である. また, 自明な Lévy 過程でない安定過程を, **自明でない安定過程** という.

定理 4.1 $\mathbf{R}^d$ 上の自明でない Lévy 過程 $(X_t)_{t\ge 0}$ が安定過程 $\iff$ $^\forall t>0, {}^{\exists_1} a_t>0, b_t\in\mathbf{R}^d;$ $X_t \overset{(d)}{=} a_tX_1+b_t$, i.e., $\widehat{\mu}(z)^t=\widehat{\mu}(a_tz)e^{ib_t\cdot z}$. また, 常に $b_t=0$ として取れるとき, 狭義安定過程と同値となる.

[証明] $^\forall a>0, {}^\exists b>0, c\in\mathbf{R}^d;$ (X_{at}) と (bX_t+ct) が法則同等なので, $t=1, a=t$ として, $^\forall t>0, {}^\exists a_t, b_t; X_t \overset{(d)}{=} a_tX_1+b_t$ は明らか. 一意性は, 定数でない確率変数 X に対し, $aX+b \overset{(d)}{=} \widetilde{a}X+\widetilde{b}$ とすると, $a=\widetilde{a}, b=\widetilde{b}$ が言える. 実際, $aX+b\overset{(d)}{=}X$ として, $a=1, b=0$ を示せば十分で ($\widetilde{a}\ne 0$ なら $\widetilde{a}^{-1}(aX+b-\widetilde{b})\overset{(d)}{=}X$ より), X_1, X_2 を独立, かつ, $\overset{(d)}{=}X$ とすると, $a(X_1-X_2)=(aX_1+b)-(aX_2+b)\overset{(d)}{=}X_1-X_2$. よって, $^\forall n\ge 1$, $a^n|X_1-X_2|\overset{(d)}{=}|X_1-X_2|$. もし, $a\ne 1$ なら, $X_1-X_2\overset{(d)}{=}0$ となり, X が定数となるので矛盾 ($\to$ 問). 故に $a=1$. 更に, $X\overset{(d)}{=}X+nb$ ($^\forall n$) で, $b=0$ ($\to$ 問).
逆は, $^\forall a>0$ に対し, $X_a\overset{(d)}{=}a_aX_1+b_a$ より, $b=a_a, c=b_a$ とすれば, $X_a\overset{(d)}{=}bX_1+c$ で, $(X_{at}), (bZ_t+ct)$ は共に Lévy 過程で, $t=1$ での分布が等しいので, 法則同等となり, 安定過程となる. 狭義の方は明らかである. ■

問 4.1 X_1, X_2 が独立で, $X_1-X_2\overset{(d)}{=}0$ なら, $X_1=X_2=$ 定数 a.s. を示せ. また, $X\overset{(d)}{=}X+nb$ ($^\forall n$) なら, $b=0$ を示せ.

（解） $P(X_1-X_2=0)=1$ より, $X_1=X_2$ a.s. で, 同分布, それを μ とすると, X_1-X_2 の特性関数は $|\widehat{\mu}(z)|^2=1$ となり, 次の事実より, 結果を得る.
・$|\widehat{\mu}|=1$ (より弱く, 原点の近傍だけで) なら, $^\exists\gamma\in\mathbf{R}^d; \mu=\delta_\gamma$

実際, 成分ごとに見れば良いので $d=1$ で示せば十分で, 0 の近傍の $z \neq 0$ で, ${}^{\exists}\gamma_z; \widehat{\mu}(z) = e^{i\gamma_z}$. よって, μ の台は $x = (\gamma_z + 2n\pi)/z$ にある. もしこれが 2 つ以上あれば, $|x_1 - x_2| \geq 2\pi/|z|$ となり, $|z|$ はいくらでも小さく取れるので矛盾.

また, $X \overset{(\mathrm{d})}{=} X + nb$ (${}^{\forall}n$) のとき, もし, $b \neq 0$ とすると, ある程度小さい集合 ${}^{\exists}A; \delta := P(X \in A) > 0$ をとれば, $1 \geq P(X \in \bigcup_{n\geq 1}(A+nb)) = \sum_{n\geq 1} P(X \in A+nb) = \infty \cdot \delta = \infty$ となり, 矛盾. 故に $b = 0$.

定理 4.2 (安定過程の指数の存在) (X_t) が自明でない安定過程であれば, ${}^{\exists_1}\alpha \in (0,2]$; ${}^{\forall}t > 0, {}^{\exists_1}b_t \in \mathbf{R}^d$; $X_t \overset{(\mathrm{d})}{=} t^{1/\alpha}X_1 + b_t$, i.e., $\widehat{\mu}(z)^t = \widehat{\mu}(t^{1/\alpha}z)e^{iz\cdot b_t}$.

また, (X_t) が 0 でない狭義安定過程であれば, 同様に ${}^{\exists_1}\alpha \in (0,2]$; ${}^{\forall}t > 0, X_t \overset{(\mathrm{d})}{=} t^{1/\alpha}X_1$, i.e., $\widehat{\mu}(z)^t = \widehat{\mu}(t^{1/\alpha}z)$.

定義 4.2 上の定理で定まる指数 $0 < \alpha \leq 2$ をそれぞれ, 自明でない安定過程の指数, 0 でない狭義安定過程の指数と呼ぶ.

また δ 分布でない安定分布, δ_0 でない狭義安定分布の指数を, 対応する安定過程の指数で定義する.

0 でない自明な狭義安定過程の指数は 1 であるが, 安定過程としての指数は定義されていないことに注意.

$\mathbf{R}^d$ 上の Brown 運動は指数 2 の狭義安定過程で, δ 分布でない Gauss 分布から定まる Lévy 過程は, 指数 2 の安定過程である.

[定理 4.2 の証明] まず, 狭義安定過程 (Y_t) について示す. $Y_1 \overset{(\mathrm{d})}{=} \eta$ とする. ${}^{\forall}t > 0, {}^{\exists_1}a_t > 0$; $Y_t \overset{(\mathrm{d})}{=} a_tY_1$ より, $\widehat{\eta}(z)^t = \widehat{\eta}(a_tz)$. 更に $s > 0$ に対しても,

$$\widehat{\eta}(a_{st}z) = \widehat{\eta}(z)^{st} = (\widehat{\eta}(z)^t)^s = \widehat{\eta}(a_tz)^s = \widehat{\eta}(a_sa_tz).$$

一意性から, $a_{st} = a_sa_t$ と $a_1 = 1$ を満たす. 更に $t > 0$ についての連続性が示せるので, ${}^{\exists}\beta; a_t = t^{\beta}$ ($\to$ 問), しかも $\beta > 0$ も分かるので $\alpha := 1/\beta$ とおけばよい. a_t の一意性から, α も一意.

実際, 連続性については, $t_n \to t$ とすると, $\widehat{\eta}(a_{t_n}z) = \widehat{\eta}(z)^{t_n} \to \widehat{\eta}(z)^t = \widehat{\eta}(a_tz)$. もし $a_{t_n} \to 0$ なら, $\widehat{\eta}(z)^t = \widehat{\eta}(0) = 1$ となり, $Y_1 = 0$ a.s. となってしまい $Y_1 \neq 0$ a.s. に矛盾. もし $a_{t_n} \to \infty$ だと, $\widehat{\eta}(z) = \widehat{\eta}(a_{t_n}^{-1}z)^{t_n} \to \widehat{\eta}(0)^t = 1$ で, やはり矛盾. $a_{t_n} \to a \in (0,\infty)$ とすると, 上から, $\widehat{\eta}(az) = \widehat{\eta}(z)^t = \widehat{\eta}(a_tz)$ で一意性から, $a = a_t$. 以上から, 連続性と, $0 < a_t < \infty$ が分かる (より正確には, $\limsup, \liminf$ を考え, それに一致する部分列に対し, 上のことが全て成り立つので, この 2 つの値が $a_t \in (0,\infty)$ に一致する). 更に, $a_t = t^{\beta}$ で, もし, $\beta < 0$ なら, $t \downarrow 0$ のとき, $a_t \to \infty$ となるので上で示したように矛盾する. また, もし $\beta = 0$ なら, $a_t = 1$, $\widehat{\eta}(z)^t = \widehat{\eta}(z)$ で, $t \downarrow 0$ なら, $\widehat{\eta}(z) \equiv 1$ となり, 矛盾. よって, $\beta > 0$. 従って, $\alpha := 1/\beta$ とおける.

安定過程 (X_t) の時は, その対称化 $Y_t = X_t - \widetilde{X}_t$ を考えれば, 前の定理より, ${}^{\forall}t > 0, {}^{\exists_1}a_t > 0, b_t \in \mathbf{R}^d$; $X_t \overset{(\mathrm{d})}{=} a_tX_1 + b_t$ で, 非自明より, (Y_t) は 0 でない狭義安定過程となるので, 上の結果から次のように分る. $X_1 \overset{(\mathrm{d})}{=} \mu, Y_1 \overset{(\mathrm{d})}{=} \eta$ とすると, $\widehat{\eta}(z) = |\widehat{\mu}(z)|^2$ で,

$$|\widehat{\mu}(z)|^{2t} = \widehat{\eta}(z)^t = \widehat{\eta}(t^{1/\alpha}z) = |\widehat{\mu}(t^{1/\alpha}z)|^2.$$

これから, ${}^{\exists}\widetilde{b_t} \in \mathbf{R}^d; \widehat{\mu}(z)^t = e^{iz\cdot\widetilde{b_t}}\widehat{\mu}(t^{1/\alpha}z)$ が言え, 前定理の係数の一意性から $\widetilde{b_t} = b_t$.

後は, $\alpha \le 2$ を示せば良い. μ の生成要素を (A, ν, γ) とする. また, ν_t を $\nu_t(dx) := \nu(t^{-1/\alpha}dx)$ で定義する. X_t と $t^{1/\alpha}X_1 + b_t$ の特性関数の比較より, 次を得る.

$$tA = t^{2/\alpha}A, \quad t\nu = \nu_t$$

(ちなみに, $t^{1/\alpha}\gamma + b_t = t\gamma$, i.e., $b_t = (t - t^{1/\alpha})\gamma$ となる). これから, まず $\alpha \ne 2$ なら $A = 0$. 更に, $\alpha > 2$ とすると, $1 - 2/\alpha > 0$ なので, $x = t^{-1/\alpha}x'$ と変換し, $\nu(t^{-1/\alpha}dx) = \nu_t(dx) = t\nu(dx)$ より, ${}^\forall a > 0$,

$$\int_{|x|<a} |x|^2\nu(dx) = t^{-2/\alpha}\int_{|x|<t^{1/\alpha}a} |x|^2\nu(t^{-1/\alpha}dx) = t^{1-2/\alpha}\int_{|x|<t^{1/\alpha}a} |x|^2\nu(dx) \to 0 \ (t \downarrow 0).$$

よって, $\nu = 0$ となる. つまり, $X_1 = b_1 + \gamma$ となり, 自明でないことに反する. 故に, $\alpha \le 2$ である. ■

問 $a_t > 0$ が連続 in $t > 0$ で, $a_{st} = a_s a_t$ と $a_1 = 1$ を満たすなら, ${}^\exists\beta; a_t = t^\beta$ を示せ.

$\beta := \log a_e$ とおく. 即ち, $e^\beta = a_e$. ${}^\forall t > 0$, $a_{t^n} = a_t^n$ と $a_{t^{1/n}} = a_t^{1/n}$ $(a_{t^{1/n}}^n = a_t$ による). よって, ${}^\forall r \in \mathbf{Q}, a_{t^r} = a_t^r$. 連続性から, ${}^\forall x \in \mathbf{R}, a_{t^x} = a_t^x$. よって, $e^x = t$ とおけば, $a_t = a_{e^x} = a_e^x = e^{\beta x} = e^{\beta \log t} = t^\beta$.

次の結果の証明には, **タイプ同値** という概念が用いられるが, 本テキストでは, 省略する.

定理 4.3 ${}^\exists(S_n)$: i.i.d. Z_k の確率変数の部分和, 即ち, RW (random walk) で, ${}^\exists a_n > 0, b_n \in \mathbf{R}^d$; $a_nS_n + b_n \to \mu$ in law なら, μ は安定分布. また, 逆も成り立つ. 即ち, μ が安定分布なら, 上の形の極限分布となるが, より正確には, $Z_k \overset{(\mathrm{d})}{=} \mu$ とすると, ${}^\exists a_n > 0, b_n \in \mathbf{R}^d$; $a_nS_n + b_n \overset{(\mathrm{d})}{=} \mu$ とできる.

次に, 安定分布の特性関数の標準形について考える.

定理 4.4 (安定分布の標準形) $\mu \in I(\mathbf{R}^d), \ne \delta$ として, 生成要素を (A, ν, γ) とする.

(1) μ が 2 安定分布 $\iff$ $\nu = 0$.

(2) $0 < \alpha < 2$ とする. μ が α 安定分布 $\iff$ $A = 0$, ${}^{\exists_1}\lambda(d\xi) \ne 0$: 有限測度 on $S = S^{d-1}$;

$$\nu(dx) = \int_S \lambda(d\xi)\int_0^\infty 1_{dx}(r\xi)r^{-1-\alpha}dr.$$

即ち, 次の**第 1 標準形**をもつ. $\widehat{\mu}(z) = e^{t\psi(z)}$;

$$\psi(z) = \int_S \lambda(d\xi)\int_0^\infty \left(e^{i\langle z, r\xi\rangle} - 1 - i\langle z, r\xi\rangle 1_{(0,1)}(r)\right) r^{-1-\alpha}dr + i\langle\gamma, z\rangle.$$

更に, 次の**第 2 標準形**ももつ. $z = |z|\zeta \in \mathbf{R}^d$ に対し,

$\alpha \ne 1$ なら,

$$\psi(z) = -|z|^\alpha \int_S \left(1 - \tan\frac{\pi\alpha}{2}\mathrm{sgn}\ \langle\zeta, \xi\rangle\right) |\langle\zeta, \xi\rangle|^\alpha \lambda(d\xi) + i\langle\gamma_0, z\rangle.$$

$\alpha = 1$ なら,

$$\psi(z) = -|z| \int_S \left(|\langle\zeta, \xi\rangle| + \frac{2}{\pi}\langle\zeta, \xi\rangle \log|\langle z, \xi\rangle|\right) \lambda(d\xi) + i\langle\gamma_0, z\rangle.$$

これらの表現での $\lambda, \gamma, \gamma_0$ は一意である.

これから, 次はすぐに分る.

定理 4.5 (狭義安定分布の標準形) $\mu \in I(\mathbf{R}^d), \neq \delta_0$ として, $0 < \alpha \leq 2$ とする.
μ が α 狭義安定分布 $\iff$

(1) $\alpha = 2$ のとき, μ は δ_0 でない平均 0 の Gauss 分布.

(2) $0 < \alpha < 2$ のとき, 次の**第 1 標準形**をもつ. ${}^{\exists_1}\lambda(d\xi)$: 有限測度 on $S = S^{d-1}$; $\lambda \neq 0$ if $\alpha \neq 1$ で, 次を満たす.

(i) $0 < \alpha < 1$ のとき,

$$\widehat{\mu}(z) = \exp\left[\int_S \lambda(d\xi) \int_0^\infty \left(e^{i\langle z, r\xi\rangle} - 1 - i\langle z, r\xi\rangle 1_{(0,1)}(r)\right) r^{-1-\alpha} dr\right].$$

(ii) $1 < \alpha < 2$ のとき,

$$\widehat{\mu}(z) = \exp\left[\int_S \lambda(d\xi) \int_0^\infty \left(e^{i\langle z, r\xi\rangle} - 1 - i\langle z, r\xi\rangle\right) r^{-1-\alpha} dr\right].$$

(iii) $\alpha = 1$ のとき, ${}^{\exists_1}\gamma \in \mathbf{R}^d$;

$$\widehat{\mu}(z) = \exp\left[\int_S \lambda(d\xi) \int_0^\infty \left(e^{i\langle z, r\xi\rangle} - 1 - i\langle z, r\xi\rangle 1_{(0,1)}(r)\right) r^{-2} dr + i\langle \gamma, z\rangle\right],$$

かつ, ($\lambda = 0$ も可)

$$\int_S \xi\lambda(d\xi) = 0, \quad \lambda(S) + |\gamma| > 0.$$

更に, **第 2 標準形**ももつがそれは, 安定分布の第 2 標準形と同じで, 次の条件も満たす.

- $\alpha \neq 1$ のとき, $\gamma_0 = 0$ ($\lambda \neq 0$).
- $\alpha = 1$ のとき, λ は 0 も可だが, $\displaystyle\int_S \xi\lambda(d\xi) = 0$, $|\gamma_0| + \lambda(S) > 0$ を満たす.

[安定過程の標準形　定理 4.4 の証明] μ を α 安定分布, X_t を対応する安定過程とする. 指数の存在で示したように, $tA = t^{2/\alpha}A$, $t\nu = \nu_t$ ($\nu_t(dx) = \nu(t^{-1/\alpha}dx)$) で, $\alpha = 2$ なら $\nu = 0$, $\alpha < 2$ なら $A = 0$ であった.

$$\lambda(d\xi) := \alpha\nu((1,\infty)d\xi)$$

on $S = \mathbf{S}^{d-1}$ とおけば, 有限測度で, 更に, 定理の (2) の ν の λ による表示の式（右辺）を, 上の λ によるものとして ν' とおけば, 即ち,

$$\nu'(dx) = \int_S \lambda(d\xi) \int_0^\infty 1_{dx}(r\xi) r^{-1-\alpha} dr$$

とおけば, $\nu' = \nu$ が言える. 実際, ${}^{\forall}a > 0, C \in \mathcal{B}(S)$ に対し,
$a^{-\alpha}\nu(dx) = \nu_{a^{-\alpha}}(dx) = \nu(adx)$ より,

$$\nu'((a,\infty)C) = \lambda(C) \int_a^\infty r^{-1-\alpha} dr = \frac{1}{\alpha} a^{-\alpha}\lambda(C) = a^{-\alpha}\nu((1,\infty)C) = \nu((a,\infty)C).$$

λ は ν から決まるので, 一意で, よって, γ, γ_0 もそうなる. また, 逆も明らかである.

第 2 標準形については, 次の積分結果を用いれば, 可能である.

$$\int_0^\infty (e^{ir}-1)r^{-1-\alpha}dr = \Gamma(-\alpha)e^{-i\pi\alpha/2} \quad (0<\alpha<1).$$

$$\int_0^\infty (e^{ir}-1-ir)r^{-1-\alpha}dr = \Gamma(-\alpha)e^{-i\pi\alpha/2} \quad (1<\alpha<2).$$

$$\int_0^\infty (e^{izr}-1-izr1_{(0,1)}(r))r^{-2}dr = -\frac{\pi}{2}z - iz\log z + icz \ (z>0),$$

ここで,

$$c = \int_1^\infty \sin r \ \frac{dr}{r^2} + \int_0^1 (\sin r - r)\frac{dr}{r^2}.$$

■

上の証明の最後の等式計算は, $0<\alpha<1$ のとき,

$$\int_0^\infty (e^{-ur}-1)r^{-1-\alpha}dr = \int_0^\infty drr^{-1-\alpha}\int_0^u (-re^{-tr})dt = -\int_0^u dt\ t^{\alpha-1}\int_0^\infty s^{(1-\alpha)-1}e^{-s}ds$$

$= -\alpha^{-1}\Gamma(1-\alpha)u^\alpha = \Gamma(-\alpha)u^\alpha$ より, $w\in \mathbf{C}; \neq 0, \mathrm{Re}\, w\le 0$ に対し,

$$\int_0^\infty (e^{wr}-1)r^{-1-\alpha}dr = \Gamma(-\alpha)(-w)^\alpha.$$

分枝は, $(-w)^\alpha = |w|^\alpha e^{i\alpha\arg(-w)}$; $\arg(-w)\in(-\pi,\pi)$. 実際, 両辺は, $\mathrm{Re}\, w<0$ で正則, $\mathrm{Re}\, w\le 0, w\neq 0$ で連続, 負で一致なので一致の定理より. これにより, 最初の等式を得る. 第 2 の等式は, 部分積分で、最初の等式に帰着. 最後は, $\int_0^\infty r^{-2}(1-\cos r)dr = \pi/2$ により, 直接計算できる.

定理 4.6 (X_t) が回転不変な α 安定過程 $(0<\alpha\le 2)$ $\iff$ ${}^\exists c>0; E[e^{i\langle z,X_t\rangle}] = e^{-tc|z|^\lambda}$. また, $\alpha<2$ のとき, λ は S 上の一様測度となる.

4.2 L-過程 (自己分解可能過程) と L-分布

安定過程を更に拡張したものとして, 自己分解可能過程 , または, 単に, L-過程と呼ばれるものがある.

定義 4.3 (X_t) が**自己分解可能過程 (self-decomposable process)**, または, **L-過程** $\overset{\text{def}}{\iff}$ (X_t) は d 次元 Lévy 過程で, ${}^\forall c\in(0,1)$, ${}^\exists(Y_t),(Z_t)$: d 次元 Lévy 過程 on ${}^\exists(\Omega',\mathcal{F}',P')$: 確率空間; $(Y_t)\perp\!\!\!\perp(Z_t)$, $(Y_t)=(cX_t)$ in law, $(Y_t+Z_t)=(X_t)$ in law.

また, このとき, X_1 の分布を, **自己分解可能分布** or **L-分布**という. このとき, 上の定義の条件が $t=1$ で成り立つことと同値となる, 即ち, ${}^\forall c\in(0,1)$, ${}^\exists Y,Z$: d 次元 RVs on ${}^\exists(\Omega',\mathcal{F}',P')$: 確率空間; これらの分布は無限分解可能分布で, $Y\perp\!\!\!\perp Z$, $Y\overset{(\mathrm{d})}{=}cX$, $Y+Z=X$, i.e., ${}^\exists\rho_c,\eta_c\in I(\mathbf{R}^d)$; $\rho_c\perp\!\!\!\perp\eta$, $\widehat{\rho_c}(z)=\widehat{\mu}(cz)$, $\mu=\rho_c*\eta_c$.

注) μ が L-分布なら, ${}^\forall t>0, \mu^{t*}$ もそう.

補題 4.1 (X_t) が L-過程, i.e., $X_1\overset{(\mathrm{d})}{=}\mu$ が L-分布 $\iff$ ${}^\forall c\in(0,1), {}^\exists\eta_c\in I(\mathbf{R}^d); \widehat{\mu}(z)/\widehat{\mu}(cz) = \widehat{\eta_c}(z)$. $\iff$ $\mu\leftrightarrow(A,\nu,\gamma)$ として, $r>0$ に対し, $N(r,d\xi):=\nu((r,\infty)d\xi)$ とすると, ${}^\forall B\in\mathcal{B}(S)$, $n_B(s):=N(e^{-s},B)$ が $s\in\mathbf{R}$ の凸関数（下に凸）となる.

[証明] 最初の同値は, $Z_1 \overset{(\mathrm{d})}{=} \eta_c$, 逆は, $\eta_c \in I(\mathbf{R}^d)$ から決まる Lévy 過程を (Z_t) としてやれば明らか. (Y_t) は $\mu(cz) \in I(\mathbf{R}^d)$ から決まる. 次の同値は, まず, μ を L-分布とする. $\psi(z) = \log \widehat{\mu}(z)$ とおくと, $X_1 \overset{(\mathrm{d})}{=} Y_1 + Z_1$, $Y \overset{(\mathrm{d})}{=} cX_1$、$Y_1 \perp\!\!\!\perp Z_1$ により, Z_1 の分布の対数特性関数が $\psi_c(z) = \psi(z) - \psi(cz)$ となるので, 結局, μ: L-分布 $\iff$ $\widehat{\eta_c} = e_c^{\psi}$ がが Lévy の標準形で表されれば良い. $A_c = (1-c^2)A, \nu_c(dx) : \nu(dx) - \nu(c^{-1}dx)$ とおくと, ある $\gamma_c \in \mathbf{R}^d$ が存在し, $\psi_c \leftrightarrow (A_c, \nu_c, \gamma_c)$ となるが, これが, 無限分解可能分布の対数特性関数となるためには, $\nu_c \geq 0$, i.e., $\nu(E) - \nu(c^{-1}E) \geq 0$ ($^\forall E \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^d \setminus \{0\})$ が必要十分となる. しかも, これは与えられた条件と同値であることが, 任意に固定した $B \in \mathcal{B}(S)$ に対し, $n(s) = n_B(s)$ として, $^\forall u > 0$ に対し, $n(s+u) - n(s) \geq n(s+u+\log c) - n(s+\log c)$ を満たすことと同値であることからすぐ分かる ($\to$ 問. $c \in (0,1)$ より, $\log c < 0$ に注意). ■

問 上の証明で述べた次の同値を説明せよ. $\nu(E) - \nu(c^{-1}E) \geq 0$ ($^\forall E \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^d \setminus \{0\})$ $\iff$ 任意に固定した $B \in \mathcal{B}(S)$ に対し, $n(s) = n_B(s)$ として, $^\forall u > 0$ に対し, $n(s+u) - n(s) \geq n(s+u+\log c) - n(s+\log c)$. $\iff$ $^\forall B \in \mathcal{B}(S)$, $n_B(s) := N(e^{-s}, B)$ が $s \in \mathbf{R}$ の凸関数

定理 4.7 (自己分解可能過程の標準形) (X_t) が L-過程 $\iff$ X_1 の Lévy 測度 ν に対し, $^\exists \lambda(d\xi)$: 有限測度 on S, $^\exists k_\xi(r) \geq 0$: 可測 in $\xi \in S$, 非増加右連続 in $r > 0$, $k_\xi(0+) > 0$;

$$\nu(dx) = \int_S \lambda(d\xi) \int_0^\infty 1_{dx}(r\xi) \frac{k_\xi(r)}{r} dr.$$

[証明] (X_t) を L-過程とする. 上の補題から, $^\forall B \in \mathcal{B}(S)$, $N(e^{-s}, B)$ が $s \in \mathbf{R}$ の凸関数となる. そこで, $N(r, B) = \nu((r, \infty)B)$ が $r > 0$ については, 非増加なので,

$$\lambda(B) := -\int_0^\infty (1 \wedge r^2) dN(r, B) = \int_{(0,\infty)B} (1 \wedge |x|^2) \nu(dx)$$

とおくと, λ は S 上の有限測度で, 各 $r > 0$ に対し, $\lambda(d\xi) \ll N(r, d\xi)$ である. 従って, $s \in \mathbf{R}$ に対し, $^\exists H_\xi(s)$: ξ の非負可測関数; $N(e^{-s}, d\xi) = H_\xi(s)\lambda(d\xi)$. 左辺が, s に関し, 非減少かつ凸だったので, 任意の $s_1 < s_2, p \in (0,1)$ が与えられたとき, λ-a.a.ξ に対し,

$$H_\xi(s_1) \leq H_\xi(s_2), \quad H_\xi(ps_1 + (1-p)s_2) \leq pH_\xi(s_1) + (1-p)H_\xi(s_2).$$

これから, λ-a.a.ξ に対し, $H_\xi(s)$ が s に関し, 非減少かつ凸として良い. 正確にはそのようなバージョン（変形）が作れる. 実際, $^\exists C_1 \in \mathcal{B}(S); \lambda(C_1^c) = 0$, かつ, $^\forall \xi \in C_1$, $s_1 < s_2, p \in (0,1)$ なる全ての有理数に対し, $H_\xi(s)$ が上の不等式を満たすとして良いので,

$$\widetilde{H_\xi}(s) := \sup_{r \in (-\infty, s) \cap \mathbf{Q}} H_\xi(r)$$

とおけば, これが条件を満たし, しかも ξ について可測で, $N(e^{-s}, d\xi) = \widetilde{H_\xi}(s)\lambda(d\xi)$ も満たす. よって, $^\exists C_2 \subset C_1; C_2 \in \mathcal{B}(S)$, かつ, $^\forall \xi \in C_2, \widetilde{H_\xi}(-\infty) = 0$ とできる.

$$h_\xi(u) := \lim_{n \to \infty} n(\widetilde{H_\xi}(u) - \widetilde{H_\xi}(u - 1/n))$$

とおけば, 左連続で, ξ について可測, かつ,

$$\widetilde{H_\xi}(s) = \int_{-\infty}^s h_\xi(u) du.$$

更に $C=\{\xi; h_\xi\equiv 0\}, C_3=C_2\setminus C$ とおけば, $\xi\in C_3$ に対しては, $h_\xi(\infty)>0$ で,

$$\nu((0,\infty)C)=\lim_{s\to\infty}N(e^{-s},C)=\lim_{s\to\infty}\int_C \widetilde{H_\xi}(s)\lambda(d\xi)=0$$

これから,

$$\begin{aligned}\nu((r,\infty)B) &= N(r,B)=\int_{B\cap C_3}\widetilde{H_\xi}(\log r)\lambda(d\xi)\\ &= \int_{B\cap C_3}\lambda(d\xi)\int_{-\infty}^{\log r}h_\xi(u)du=\int_B\lambda(d\xi)\int_r^\infty h_\xi(-\log v)\frac{dv}{v}.\end{aligned}$$

よって、$k_\xi(v):=h_\xi(-\log v)$ if $\xi\in C_3$ と定義すれば, 可測 in (ξ,v), かつ, 非増加右連続で, $k_\xi(0+)=h_\xi(\infty)>0$. C_3 の外では, $k_\xi(v)\equiv 1$ と定義すれば, これが題意を満たす.

逆は明らか. ■

5 Lévy 過程と分布

本節では, まず, 法則の意味の Lévy 過程と普通の Lévy 過程が同等であることを示し, 更に, 分布の性質として, 絶対連続となるための十分条件を与える.

5.1 法則の意味の Lévy 過程

次の結果は, 確率連続な一般の Markov 過程に対し, 成り立つのだが, それを Lévy 過程に, アレンジしたものである. (Markov 過程の場合については, 最後の第 6 節で述べる.)

定理 5.1 (X_t) を Lévy 過程として, $X_1 \overset{(\mathrm{d})}{=} \mu$ とする. $\varepsilon > 0$ に対し,

$$\alpha_\varepsilon(t) := P(|X_t| \geq \varepsilon) = P(|X_{t+s} - X_s| \geq \varepsilon) \ ({}^\forall s \geq 0)$$

とおく.

(1) (X_t) の確率連続性より, ${}^\forall\varepsilon > 0, \lim_{t\downarrow 0} \alpha_\varepsilon(t) = 0$ を満たすが, これにより, (X_t) は D バージョンをもつ, i.e., ${}^\exists(Y_t)$ は D 過程で, (X_t) と同等. 更に, ${}^\forall t > 0, P(Y_{t-} = Y_t) = 1$ も満たす (これは (X_t) の確率連続性, 故に (Y_t) の確率連続性からすぐ言える).

(2) (X_t) が Gauss 過程なら, ${}^\forall\varepsilon > 0, \lim_{t\downarrow 0} t^{-1}\alpha_\varepsilon(t) = 0$ を満たす. 更に, この条件より, (X_t) は C バージョンをもつ.

[証明] (1) $\widetilde{\alpha_\varepsilon}(t) := \sup_{s\in[0,t]} \alpha_\varepsilon(s)$ として, $I \subset [a,b] \subset [0,\infty)$ とする.

$$B(p,\varepsilon,I) = \{X_t \text{ が } I \text{ において, (少なくとも) } p \text{ 個の } \varepsilon \text{ 振動をもつ }\}$$

即ち, I の中に, $p+1$ 個の増加時点 t_j $(j = 1,\dots,p+1)$ が取れて, 順に $|X_{t_{j+1}} - X_{t_j}| \geq \varepsilon$ を満たす事象とする.

(証明の概要) 証明の本質は, ① もし, どこかの時点で, 右極限か左極限を持たなければ, ある $\varepsilon_0 > 0$ があり, その時点の近傍で, 無限個の ε_0 振動を持つということと ② 独増分性から得られる不等式である.

① $A_{N,k}$ を X_t が $t \in [0,N] \cap \mathbf{Q}$ において, 有限個の $1/k$ 振動しか持たない事象とすると,

$$\bigcap_{N,k\geq 1} A_{N,k} \subset \{{}^\forall t \geq 0, {}^\exists X_{t+} \in \mathbf{R}^d, {}^\forall t > 0, {}^\exists X_{t-} \in \mathbf{R}^d\} =: \Omega_1$$

が成り立つ.

② 次に, $n > p \geq 1$, 固定した時点 $a \leq t_1 < \cdots < t_n \leq b$ において, $I = \{t_1,\dots,t_n\}$ として, 独立増分性より, 次が成り立つ.

$$P(B(p,4\varepsilon,I)) \leq (2\widetilde{\alpha_\varepsilon}(b-a))^p.$$

これと $\alpha_\varepsilon(t) \to 0$ $(t \downarrow 0)$ の仮定より,

③ ${}^\forall N,k \geq 1, P(A_{N,k}^c) = 0$ も言えるので, $P(\Omega_1) = 1$ となり, (X_t) の確率連続性を用いて, $Y_t := X_{t+}$ が D 変形であることが示せる.

(証明の詳細)

① 補集合について考える. もし, ${}^\exists t \geq 0; X_{t+} \in \mathbf{R}^d$ が存在しないとすると, ${}^\exists t_n \downarrow t; \lim X_{t_n}$ が存在しない, 即ち,

$${}^\exists k_0; {}^\forall j, {}^\exists n_j, m_j \geq j; |X_{t_{n_j}} - X_{t_{m_j}}| \geq 1/k_0.$$

更に, 部分列 $\{t_{n_j}\}$ を次を満たすように取れる.

$$|X_{t_{n_{j+1}}} - X_{t_{n_j}}| \geq 1/k_0.$$

明らかにこれは $\{t_{n_j}\}$ において, 無限個の $1/k_0$ 振動をもつことになる.

②は p についての帰納法で示せる. $I = \{t_1, \dots, t_n\} \subset [a, b]$, $1 \leq p < n$ であった. $p = 1$ のとき, C_k を $|X_{t_j} - X_a|$ が, $j = k$ で初めて, 2ε 以上となる事象として, $D_k = \{|X_b - X_{t_k}| \geq \varepsilon\}$ とすれば, C_k は互いに素で,

$$B(1, 4\varepsilon, I) \subset \bigcup_{k=1}^{n} \{|X_{t_k} - X_a| \geq 2\varepsilon\} = \bigcup_{k=1}^{n} C_k \subset \{|X_b - X_a| \geq \varepsilon\} \cup \bigcup_{k=1}^{n} (C_k \cap D_k)$$

となる (最初の包含関係は補集合を考えれば明らかで, 最後の包含関係も,

$$C_k \cap D_k^c \subset \{|X_{t_k} - X_a| \geq 2\varepsilon, |X_b - X_{t_k}| < \varepsilon\} \subset \{|X_b - X_a| \geq |X_{t_k} - X_a| - |X_b - X_{t_k}| > \varepsilon\}$$

による). 後は, 独立増分性より,

$$\begin{aligned} P(B(p, 4\varepsilon, I)) &\leq P(|X_b - X_a| \geq \varepsilon) + \sum_{k=1}^{n} P(C_k) P(D_k) \\ &\leq P(|X_{b-a} - X_0| \geq \varepsilon)) + \sum_{k=1}^{n} P(C_k) P(|X_{b-t_k} - X_0| \geq \varepsilon) \\ &\leq \alpha_\varepsilon(b-a) + P(\bigcup_{k=1}^{n} C_k) \widetilde{\alpha_\varepsilon}(b-a) \leq 2\widetilde{\alpha_\varepsilon}(b-a) \end{aligned}$$

次に p (≥ 1) で求める不等式が成り立つとして,

・E_k を, $\{t_1, \dots, t_k\}$ で, p 個の 4ε 振動を持ち, $\{t_1, \dots, t_{k-1}\}$ では, p 個の 4ε 振動を持たない事象として,

・F_k を $\{t_k, \dots, t_n\}$ で, 少なくとも 1 個の 4ε 振動を持つ事象とする.

$$B(p, 4\varepsilon, I) = \bigcup_{k=1}^{n} E_k, \quad B(p+1, 4\varepsilon, I) \subset \bigcup_{k=1}^{n} (E_k \cap F_k).$$

後は, $P(F_k) \leq 2\widetilde{\alpha_\varepsilon}(b-a)$ と帰納法の仮定, 独立増分性を用いて, 次を得る.

$$\begin{aligned} P(B(p+1, 4\varepsilon, I)) &\leq \sum_{k=1}^{n} P(E_k) P(F_k) \leq 2\widetilde{\alpha_\varepsilon}(b-a) \sum_{k=1}^{n} P(E_k) \\ &= 2\widetilde{\alpha_\varepsilon}(b-a) P(B(p, 4\varepsilon, I)) \leq (2\widetilde{\alpha_\varepsilon}(b-a))^{p+1}. \end{aligned}$$

従って, 求める不等式を得る.

③ ${}^\forall N, k \geq 1$ を固定する. $\varepsilon = 1/(4k)$ として, 仮定より, ${}^\exists \ell \geq 1; \widetilde{\alpha_\varepsilon}(N/\ell) < 1/2$. $t_{\ell,j} := jN/\ell$ とする.

$$\begin{aligned} P(A_{N,k}^c) &= P(X_t \text{ が } [0, N] \cap \mathbf{Q} \text{ で無限個の } 1/k \text{ 振動を持つ}) \\ &= \sum_{j=1}^{\ell} P(X_t \text{ が } [t_{\ell,j-1}, t_{\ell,j}] \cap \mathbf{Q} \text{ で無限個の } 1/k \text{ 振動を持つ}) \\ &= \sum_{j=1}^{\ell} \lim_{p \to \infty} P(B(p, 1/k, [t_{\ell,j-1}, t_{\ell,j}] \cap \mathbf{Q}) = 0 \end{aligned}$$

となる. 実際, $[t_{\ell,j-1}, t_{\ell,j}] \cap \mathbf{Q} = \{t_1, t_2, \dots\}$ と表して, $^\forall n \geq 1$,

$$P(B(p, 1/k, \{t_1, \dots, t_n\}) \leq (2\widetilde{\alpha_\varepsilon}(N/\ell))^p$$

なので, $n \to \infty$, $p \to \infty$ とすれば, 上を得る. 従って, $P(\Omega_1) = 1$ で, $Y_t := X_{t+} 1_{\Omega_1}$ とおけば, 右連続で左極限を持つ. さらに, $^\forall t \geq 0$ に対し, $r_n \in \mathbf{Q}_+, \downarrow t$ をとると, $X_{r_n} \to Y_t$ a.s. で, 確率連続性より $X_{r_n} \to X_t$ in pr. なので, 結局, $P(X_t = Y_t) = 1$ となる.

(2) まず $t\alpha_\varepsilon(t) \to 0$ $(t \downarrow 0)$ を認めて C 変形を持つことを示す. (1) から D 変形 (Y_t) が存在するので, $^\forall N \geq 1, P(^\forall t \in (0, N], Y_t = Y_{t-}) = 1$ を示せば良い.

$^\forall \ell \geq 1$ を固定し, $j = 0, 1, \dots, \ell$ に対し, $t_{\ell,j} := jN/\ell$ とおく. $^\forall \varepsilon > 0$ も固定し, $M_{\varepsilon,\ell}$ を $|Y_{t_{\ell,j}} - Y_{t_{\ell,j-1}}| \geq \varepsilon$ なる $j = 1, \dots, \ell$ の個数として, M_ε を $|Y_t - Y_{t-}| \geq \varepsilon$ なる $t \in (0, N]$ の個数とすると, $M_{\varepsilon,\ell}$ は $\mathcal{F}$ 可測で, 次が成り立つ (→ 問).

$$M_{2\varepsilon} \leq \liminf_{\ell \to \infty} M_{\varepsilon,\ell}.$$

また,

$$M_{\varepsilon,\ell} = \sum_{j=1}^{\ell} I(|Y_{t_{\ell,j}} - Y_{t_{\ell,j-1}}| \geq \varepsilon)$$

より, $\alpha_\varepsilon(t)$ の条件を用いると次を得る.

$$EM_{\varepsilon,\ell} = \sum_{j=1}^{\ell} P(|Y_{t_{\ell,j}} - Y_{t_{\ell,j-1}}| \geq \varepsilon) \leq \ell\alpha_\varepsilon(N/\ell) \to 0 \ (\ell \to \infty).$$

よって, Fatou の補題により,

$$EM_{2\varepsilon} \leq E[\liminf_{\ell \to \infty} M_{\varepsilon,\ell}] \leq \liminf_{\ell \to \infty} EM_{\varepsilon,\ell} = 0.$$

故に, $P(\bigcap_{\varepsilon > 0}\{M_\varepsilon = 0\}) = 1$ となり, 題意を得る. (正確には, $\Omega_N := \bigcap_{k \geq 1}\{\liminf_{\ell \to \infty} M_{1/k,\ell} = 0\}$ とおくと, 上の事象に含まれ, $\Omega_N \in \mathcal{F}$ で, $P(\Omega_N) = 1$. よって, $\mathcal{F}$ を完備化しておけば良い.)

後は, Gauss 分布が, $\alpha_\varepsilon(t)$ の条件を満たすことを示せば良い. 一般には,

$$\widehat{\mu}(z) = \exp\left[-\frac{1}{2}\langle Az, z\rangle + i\langle \gamma, z\rangle\right]$$

であるが, 変換により, $A = \mathrm{diag}\ (\lambda_1, \dots, \lambda_p, 0, \dots, 0)$ $(\lambda_j > 0)$, $\gamma = 0$ として示せば良い. 更に $^\forall \varepsilon > 0$ に対し, 次を示せば良い.

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t}\mu^{t*}(C_\varepsilon^c) = 0 \quad (C_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon)^d).$$

$X_t^j = 0$ if $j > p$ より,

$$\begin{aligned}
\mu^{t*}(C_\varepsilon^c) &= P(X_t \notin C_\varepsilon) = \sum_{j=1}^{p} P(|X_t^j| \geq \varepsilon) = 2\sum_{j=1}^{p} \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_j t}} \int_\varepsilon^\infty e^{-x^2/(2\lambda_j t)} dx \\
&= 2\sum_{j=1}^{p} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\varepsilon/\sqrt{\lambda_j t}}^\infty e^{-x^2/2} dx \\
&\leq \frac{2\sqrt{t}}{\varepsilon} \sum_{j=1}^{p} \sqrt{\frac{\lambda_j}{2\pi}} e^{-\varepsilon^2/(2\lambda_j t)} = o(t) \quad (t \downarrow 0).
\end{aligned}$$

但し, 最後の評価は, 次による.

$$\int_c^\infty e^{-x^2/2}dx \le \int_c^\infty \frac{x}{c}e^{-x^2/2} = \frac{1}{c}e^{-c^2/2} \quad \text{by } x/c \ge 1$$

または,

$$\int_c^\infty e^{-x^2/2}dx \le \int_c^\infty e^{-x^2/2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx = \frac{1}{c}e^{-c^2/2}.$$

■

問 上の証明の中の $M_{2\varepsilon} \le \liminf_{\ell\to\infty} M_{\varepsilon,\ell}$ を示せ.

$t > 0$ で, Y_t が 2ε 以上のジャンプを持てば, 右連続性を用いて, $^\exists \ell_0; {}^\forall \ell \ge \ell_0, {}^\exists t_{\ell,j-1} \le t < t_{\ell,j}$; $Y_{t_{\ell,j-1}}$ は Y_{t-} に近く, $Y_{t_{\ell,j}}$ は Y_t に近くとれるので, $|Y_{t_{\ell,j}} - Y_{t_{\ell,j-1}}| \ge \varepsilon$ を満たすようにできる.

5.2 Lévy 過程の分布の絶対連続性

一般に, $\mathbf{R}^d$ 上の σ 有限測度 μ は Lebesgue 測度 dx に対し, 次の **Lebesgue 分解**をもつ:

$$\mu = \mu_c + \mu_d, \quad \mu_c = \mu_{ac} + \mu_{sc}.$$

順に「連続部分＋離散部分」,「連続＝絶対連続＋特異連続」と呼ばれ, 次を満たす:

$^\forall x, \mu_c(\{x\}) = 0$, $\mu_d = \sum a_n\delta_{x_n}; a_n > 0, x_n \in \mathbf{R}^d$. また, $\mu_{ac} \ll dx$, i.e., $|A| = 0 \Rightarrow \mu_{ac}(A) = 0 \iff {}^{\exists_1} f \ge 0; \mu_{ac}(dx) = f(x)dx$, この f は a.e. で一意.

本節では, Lévy 過程 X_t の分布 μ_t が絶対連続となるための十分条件について, 考える.

定理 5.2 生成要素 (A, μ, γ) をもつ Lévy 過程 (X_t) に対し, rank $A = d$ なら, $^\forall t > 0$ に対し, μ_t は絶対連続.

非退化の Gauss 分布 (rank $A = d$) は明らかに絶対連続で, それと任意の分布の畳み込みは, 常に絶対連続となるので明らか.

$r =$ rank $A < d$ のとき, 直交変換により, 初めの r 次元は, Gauss 分布の密度関数を持つので, 残りの $d - r$ 次元の空間において, ν による密度関数を持てば, その積が全体での密度関数となるので, 絶対連続となる. 従って, 以下, $A = 0$ として, 絶対連続となるための ν の条件を調べれば良い.

次から分るように, Lévy 測度 ν が絶対連続なら, μ もそうなるが, 多次元の場合, そうでなくても言える場合がある. 回転不変な安定分布は前半の例で, 1 次元対称安定分布の直積分布は後半の例となる.

有限測度を $\widetilde{\nu}(dx) = (1 \wedge |x|^2)\nu(dx)$ とおく.

定理 5.3 (絶対連続のための第 1 十分条件) $\nu(\mathbf{R}^d) = \infty$ かつ, $^\exists \ell \ge 1; \widetilde{\nu}^{\ell *}$ が絶対連続なら, $^\forall t > 0, X_t$ の分布は絶対連続.

[証明] X_1 の分布 μ は, $\nu_n = \nu|_{\{|x|\ge 1/n\}}$ による複合 Poisson 分布

$$\mu_n = \sum_{k\ge 0} e^{-c_n}\frac{c_n^k}{k!}\nu_n^{k*} = \left(\sum_{k=0}^{\ell-1} + \sum_{k\ge \ell}\right) e^{-c_n}\frac{1}{k!}\nu_n^{k*}$$

(但し, $c_n = \nu_n(\mathbf{R}^d)$.) で近似できて, それを畳み込み要素としてもつ. ($\mu = \mu_n * \mu_n^c$ と表せる.) しかも, 上の第 2 項は, 絶対連続で, $c_n \to \infty$ より,

$$(\mu_{sc} + \mu_d)(\mathbf{R}^d) \le (\mu_{n,sc} + \mu_{n,d})(\mathbf{R}^d) \le \sum_{k=0}^{\ell-1} e^{-c_n} \frac{c_n^k}{k!} \to 0$$

を得る. 最後に, X_t $(t > 0)$ の時は, c_n を tc_n に変えれば良いだけなので, 題意を得る. ■

確率変数 X **が退化している** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^\exists a \in \mathbf{R}^d, {}^\exists V \subset \mathbf{R}^d$: 部分空間; $\dim V < d, P(X \in a+V) = 1$, i.e., supp $\mu_X \subset a + V$.

Lévy 過程 (X_t) **が退化しているは**, 同様に, ${}^\forall t > 0, P(X_t \in at + V) = 1$.

また, 退化していないとき, **非退化 (non-degenerate)** であるという. 更に一般に, 次は同値である. (1) ${}^\forall t > 0, P(X_t \in V) = 1$, (2) ${}^\exists t > 0; P(X_t \in V) = 1$, (3) $A(\mathbf{R}^d), \mathrm{supp}\ \nu \subset V, \gamma \in V$

定理 5.4 (絶対連続のための第 2 十分条件) (X_t) が非退化 Lévy 過程で, その Lévy 測度 ν が, 動径方向に絶対連続で, 発散条件, 即ち, ${}^\exists\lambda(\xi)$: 有限測度 on $S = \mathbf{S}^{d-1}$, ${}^\exists g(r,\xi)$: 可測関数 on $(0,\infty) \times S$; (但し, $g(0,\xi) = 0$ として, $r \in [0,\infty)$ 上で考えても良い.)

$$\nu(dx) = \int_S \lambda(d\xi) \int_0^\infty g(r,\xi) 1_{dx}(r\xi) dr, \quad \int_0^\infty g(r,\xi) dr = \infty \quad \lambda(d\xi)\text{-a.e.}$$

を満たせば, ${}^\forall t > 0, X_t$ の分布は絶対連続.

注) 発散条件には, $\nu = 0$, i.e., $\lambda = 0$ の場合も含まれるが, この時には, rank $A = d$ となる.

これの証明には, 次の 2 つの補題を用いる.

補題 5.1 ν が動径方向に絶対連続で, 任意の $d-1$ 次元部分空間 V に対し, $\nu(V) = 0$ なら, ν^{d*} は絶対連続となり, 前定理より μ は絶対連続.

補題 5.2 線形部分空間 $V; \dim V \le d-1$ に対し, $\mathbf{R}^d$ からの直交射影を表す行列を T とする. ν が動径方向に絶対連続なら, V 上の νT^{-1} もそうで, ν が発散条件を満たせば, νT^{-1} も $\neq 0$ なら, そう.

[定理 5.4 の証明]

$t = 1$ のとき, 即ち, μ が絶対連続を示せば良い. さらに, 前にも述べたように, $A - 0$ として示せば, 十分で, $d = 1$ なら, ν が絶対連続となるので, 定理 5.3 より, 成り立つ. $d-1$ 次元以下では成り立つとして, d 次元のときに示す. 任意の $d-1$ 次元の部分空間 V に対し, $\nu(V) = 0$ なら, 補題 5.1 から, μ は絶対連続. 従って, ${}^\exists V$: $d-1$ 次元部分空間; $\nu(V) > 0$ のときに示せば良い. まず, V_1 を, ν を V に制限したものの台の張る部分空間とする. $1 \le \dim V_1 \le d-1$ である, その直交補空間を V_2 とし, それぞれへの直交射影の行列を T_1, T_2 として, 更に, $x_j = T_j x$ と表すことにする. $\mathbf{R}^d = V_1 \oplus V_2$ である. また $\mu_1 \in I(\mathbf{R}^d)$ を次で定義する.

$$\widehat{\mu_1}(z) = \exp\left[\int_{V_1} (e^{i\langle z,x\rangle} - 1 - i\langle z,x\rangle 1_D(x))\nu(dx)\right] \quad (D = \{|x| < 1\})$$

このとき, 補題 5.2 から, V_1 上で, νT_1^{-1} が動径方向に絶対連続で発散条件も満たすので, 帰納法の仮定より, ${}^{\exists_1} f_1(x_1) \ge 0; \mu_1(dx_1) = f(x_1)dx_1$. $B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^d); |B| = 0$ に対し, $\mu(B) = 0$ を示せば良い. $\mu_2 \in I(\mathbf{R}^d)$ を $\mu = \mu_1 * \mu_2$ で定義する.

$$\mu(B) = \int_{\mathbf{R}^d} h(y_1, y_2)\mu_2(dy), \quad h(y_1, y_2) := \int_{V_1} 1_B(x_1 + y_1, y_2) f(x_1) dx_1$$

となる.

$$\int_{V_2} dy_2 \int_{V_1} 1_B(x_1,y_2)dx_1 = |B| = 0$$

より, $\displaystyle\int_{V_1} 1_B(x_1,y_2)dx_1 = 0$ dy_2-a.e. 即ち, $\exists B_2 \in \mathcal{B}(V_2); |B_2| = 0; \forall y_2 \notin B_2$ に対して成り立つ. よって, $\forall y_1 \in V_1$ と $\forall y_2 \notin B_2$ に対し, $\displaystyle\int_{V_1} 1_B(x_1+y_1,y_2)dx_1 = 0$. 故に, $h(y_1,y_2) = h(y_1,y_2)1_{B_2}(y_2)$. $Y \overset{(\mathrm{d})}{:=} \mu_2$ on $\mathbf{R}^d$, $Y_j := T_jY$ と定義して, $\rho_2 \overset{(\mathrm{d})}{:=} Y_2$ on V_2, $\rho_1(dy_1|\ y_2) := P(Y_1 \in dy_1|\ Y_2 = y_2)$ とすると

$$\mu(B) = \int_{\mathbf{R}^d} h(y_1,y_2)1_{B_2}(y_2)\mu_2(dy) = \int_{B_2} \rho_2(dy_2) \int_{V_1} h(y_1,y_2)\rho_1(dy_1|\ y_2)$$

となり, $\rho_2 \in I(V_2)$ である. ν_2 を μ_2 の Lévy 測度とすると, ρ_2 の Lévy 測度は, $\nu_3 := \nu_2 T_2^{-1}|_{V_2}$ となり, V_2 上で, 動径方向に絶対連続で発散条件も満たし, しかも, ρ_2 は非退化である. 実際, もし, ν_3 の台が, V_2 の真部分空間 $V_2^0 \subset V_2$ にあるとすると, ν_2 の台が, $V_1 + V_2^0$ にあることになり, よって, ν もそうなり, μ の非退化性に反するので, ν_3 の台の張る空間が V_2 となり, ρ_2 は V_2 上で非退化となる. 従って, 帰納法の仮定により, ρ_2 は V_2 上で絶対連続となり, $\rho_2(B_2) = 0$. 故に, $\mu(B) = 0$ を得る. ■

[補題 5.1 の証明] $|B| = 0$ として, $\widetilde{\nu}^{d*}(B) = 0$ を示せば良い.

$$\widetilde{\nu}^{d*}(B) = \int_{S^d} \prod_{j=1}^d \lambda(d\xi_j) \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty 1_B(r_1\xi_1 + \cdot + r_d\xi_d) \prod_{j=1}^d g(r_j,\xi_j)(1 \wedge r_j^2)dr_j.$$

まず仮定より, $\forall V \subset \mathbf{R}^d$; 部分空間; $\dim V < d$ に対し, $\lambda(V \cap S) = 0$ として良い. 更に, $V(\xi_1,\ldots,\xi_d)$ を $\xi_1,\ldots,\xi_d \in S$ の張る線形空間として, $1 \le r \le d$ に対し, $K_r = \{(\xi_1,\ldots,\xi_d) \in S^d; \dim V(\xi_1,\ldots,\xi_d) = r$ とおく. このとき, S^d を次のように素な集合の和に分解する.

$$S^d = \bigcup_{r \le d} K_r, \quad K_r = \bigcup_{\{i_1,\ldots,i_r\}} K(i_1,\ldots,i_r) \quad \text{if } r < d.$$

但し, $K(i_1,\ldots,i_r)$ は $(\xi_1,\ldots,\xi_d) \in K_r$ の内, $\xi_{i_1},\ldots,\xi_{i_r}$ が線形独立なもの全体とする. 後は, K_d 上では, $|B| = 0$ より, 0 となり, 残りは, 仮定から消えるので, $\widetilde{\nu}^{d*}(B) = 0$ を得る. 実際, $\xi_1,\ldots,\xi_d$ が線形独立なら, 変数変換 $(r_j)_{j \le d} \mapsto r_1\xi_1 + \cdot + r_d\xi_d$ により,

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty 1_B(r_1\xi_1 + \cdot + r_d\xi_d) \prod_{j=1}^d g(r_j,\xi_j)(1 \wedge r_j^2)dr_j = 0$$

となるので, K_d 上で 0 となる. また, $1 \le r \le d-1$ として, $i_0 \ne i_1,\ldots,i_r$ を固定すると, 仮定より, $\lambda(K(i_1,\ldots,i_r)) = 0$ かつ, $K(i_1,\ldots,i_r) = S \cap V(\xi_{i_1},\ldots,\xi_{i_r})$ なので,

$$\int_{K(i_1,\ldots,i_r)} \prod_{j=1}^d \lambda(d\xi_j) \le \int_{S^{d-1}} \prod_{j \ne i_0} \lambda(d\xi_j) \int_S 1_{V(\xi_{i_1},\ldots,\xi_{i_r})}(\xi_{i_0})\lambda(d\xi_{i_0}) = 0.$$

よって $\widetilde{\nu}^{d*}(B) = 0$. ■

[補題 5.2 の証明] V の直交補空間を V_2, そこへの射影を T_2 とする. $c := \lambda(S \setminus V_2)$ とおく. $c = 0$ なら, ν の台は V_2 に集中し, νT^{-1} の台は $\{0\}$ となるので, 明らか. $c > 0$ とする. $Q := c^{-1}\nu$ を $S \setminus V_2$ に制限し, 確率測度として, $Y(\xi) = T\xi/|T\xi|, Z(\xi) = T_2\xi$ を確率変数とみる

とき, Y の分布を, $P_Y(d\eta)=Q(Y\in d\eta)$ on $S\cap V$, $Y=\eta$ という条件の下で, Z の条件付き分布を $P_Z^\eta(d\zeta)=Q(Z\in d\zeta|\ Y=\eta)$ on V_2 とする. $P_Z^\eta(d\zeta)$ は $\{|\zeta|<1\}\cap V_2$ 上の分布で, P_Y 測度 0 の η を除いて定まる. $\xi=T\xi+T_2\xi=(1-|Z|^2)^{1/2}Y+Z$ である ($1=|\xi|^2=|T\xi|^2+|Z|^2$ より, $|T\xi|^2=1-|Z|^2$ による). このとき, $\Lambda(d\eta):=cP_Y(d\eta)$,

$$G(r,\eta):=\int_{V_2}(1-|\zeta|^2)^{-1/2}g((1-|\zeta|^2)^{-1/2}r,(1-|\zeta|^2)^{1/2}\eta+\zeta))P_z^\eta(d\zeta)$$

とおけば, 次を得る.

$$\nu T^{-1}(B)=\int_{S\cap V}\Lambda(d\eta)\int_0^\infty G(r,\eta)1_B(r\eta)dr$$

実際, $^\forall B\in\mathcal{B}(V); 0\notin B$ に対し, 上の分布のもと, $\xi-\zeta=T\xi=(1-|\zeta|^2)^{1/2}\eta$ より,

$$\begin{aligned}\nu T^{-1}(B) &= \int_{S\setminus V_2}\lambda(d\xi)\int_0^\infty g(r,\xi)1_B(rT\xi)dr\\ &= c\int_{S\cap V}P_Y(d\eta)\int_{V_2}P_z^\eta(d\zeta)\int_0^\infty g(r,(1-|\zeta|^2)^{1/2}\eta+\zeta))1_B(r(1-|\zeta|^2)^{1/2}\eta)dr\\ &= c\int_{S\cap V}P_Y(d\eta)\int_{V_2}(1-|\zeta|^2)^{-1/2}h_B(\eta,\zeta)P_z^\eta(d\zeta).\end{aligned}$$

但し,

$$h_B(\eta,\zeta)=\int_0^\infty g((1-|\zeta|^2)^{-1/2}r,(1-|\zeta|^2)^{1/2}\eta+\zeta))1_B(r\eta)dr.$$

これより, 上式を得る.

更に, 発散条件については, $^\forall C\in\mathcal{B}(S), \nu((0,\infty)C)=0$ or ∞ と同値で, $C\in\mathcal{B}(S\cap V)$ なら, $x\in T^{-1}((0,\infty)C) \iff Tx\neq 0, Tx/|Tx|\in C$ より, $(0,\infty)C+V_2$ を単位ベクトル化したものを C_1 とおけば, $T^{-1}((0,\infty)C)=(0,\infty)C_1$, かつ, $C_1\in\mathcal{B}(S)$ なので, $\nu T^{-1}((0,\infty)C)=\nu((0,\infty)C_1)=0$ or ∞ となる. ■

6 Lévy 過程と Markov 過程

(X_t): **Markov 過程 (Markov process)** $\overset{\text{def}}{\iff}$ 任意の時刻 $0 \le s < t$ と有界 Borel 関数 f に対し, $E[f(X_t)|\ \mathcal{F}_s] = E[f(X_t)|\ X_s]$ a.s. 更に, (上式)$= E[f(X_{t-s}|\ X_0 = x]|_{\ x=X_s}$ a.s. となるとき, **時間的一様な Markov 過程 (time-homogeneous MP)** という.

また $X_0 = x$ a.s. のとき, x を出発する Markov 過程という. またこのとき, $X_t = X_t^x$ と表したり, (X_t, P_x) と表したりする.

例えば, Lévy 過程 (X_t) に対し, $X_t^x = x + X_t$ とおけば, x を出発する Markov 過程となる.

(X_t, P_x) を $\mathbf{R}^d$ 上の x を出発する時間的一様なマルコフ過程とする. このとき有界 Borel 関数 φ に対し,

$$P_t(x,dy) := P_x(X_t \in dy), \quad P_t\varphi(x) := E_x[\varphi(X_t)] = \int_{\mathbf{R}^d} \varphi(y)P_t(x,dy)$$

を**推移確率** という.

推移確率 $(P_t(x,dy))_{t\ge 0}$ に対し, ${}^\exists(P_t(dy))_{t\ge 0}$; $P_t(x,dy) = P_t(dy-x)$ (${}^\forall t > 0$) となるとき, **空間的一様**という, このとき, (X_t) は**時間的空間的一様な Markov 過程**という.

これは, 実は法測の意味の Lévy 過程と同等である. $P_t(dy) = \mu^{t*}(dy)$ で与えられる.

定理 6.1 (X_t) を, x_0 を出発する時間的一様な Markov 過程で, $P_t(x,dy)$ をその推移確率とする. $\varepsilon > 0$ に対し, $D_\varepsilon(x) := \{y; |x-y| < \varepsilon\}$ として,

$$\alpha_\varepsilon(t) := \sup_{x\in\mathbf{R}^d} P_t(x, D_\varepsilon(x)^c) = \sup_{x\in\mathbf{R}^d} P_x(|X_t - x| \ge \varepsilon)$$

とおく.

(1) ${}^\forall\varepsilon > 0, \lim_{t\downarrow 0}\alpha_\varepsilon(t) = 0$ なら, (X_t) は確率連続で, D バージョンをもつ, i.e., (Y_t) は D 過程で, (X_t) と同等. 更に, ${}^\forall t > 0, P(Y_{t-} = Y_t) = 1$ も満たす (これは (X_t) の確率連続性, 故に (Y_t) の確率連続性からすぐ言える).

(2) ${}^\forall\varepsilon > 0, \lim_{t\downarrow 0} t^{-1}\alpha_\varepsilon(t) = 0$ なら, (X_t) は C バージョンをもつ.

[証明] Lévy 過程の時とほぼ同様で, 証明の②が次のように変わるだけなので, それを示す. $\widetilde{\alpha_\varepsilon}(t)$, $B(k,\varepsilon,I)$ を前と同じ定義として, $0 \le s_1 < \cdots < s_m \le a < b, I \subset [a,b]$ として, 有界 Borel 関数 $g(x_1,\dots,x_m)$ に対し, $Z := g(X_{s_1},\dots,X_{s_m})$ とおく.

② Markov 性より, 次が成り立つ.

$$E[Z; B(p,4\varepsilon,I)] \le EZ(2\widetilde{\alpha_\varepsilon}(b-a))^p.$$

p についての帰納法で示せる. $p = 1$ なら, C_k, D_k を Lévy の時と同じとする, 即ち, C_k を $|X_{t_j} - X_a|$ が, $j = k$ で初めて, 2ε 以上となる事象として, $D_k = \{|X_b - X_{t_k}| \ge \varepsilon\}$ とすれば, C_k は互いに素で, Lévy の時と全く同様に,

$$B(1,4\varepsilon,I) \subset \bigcup_{k=1}^n \{|X_{t_k} - X_a| \ge 2\varepsilon\} = \bigcup_{k=1}^n C_k \subset \{|X_b - X_a| \ge \varepsilon\} \cup \bigcup_{k=1}^n (C_k \cap D_k)$$

となる. 後は, $\mathcal{F}_a$ と $\mathcal{F}_{t_k}$ で条件を付けて, Markov 性を用いれば,

$$\begin{aligned} E[Z;B(1,4\varepsilon,I)] &\le E[ZP(|X_b-X_a|\ge\varepsilon|\ X_a)]+\sum_{k=1}^n E[Z1_{C_k}P(D_k|\ X_{t_k})] \\ &= E[ZP_{X_a}(|X_{b-a}-X_0|\ge\varepsilon)]+\sum_{k=1}^n E[Z1_{C_k}P_{X_{t_k}}(|X_{b-t_k}-X_0|\ge\varepsilon)] \\ &\le EZ\alpha_\varepsilon(b-a)+\sum_{k=1}^n E[Z1_{C_k}]\alpha_\varepsilon(b-t_k)\le EZ\cdot 2\widetilde{\alpha_\varepsilon}(b-a) \end{aligned}$$

次に $p\ (\ge 1)$ で求める不等式が成り立つとして, 再び, E_k,F_k を Lévy のときと同じで定義すれば,

$$B(p,4\varepsilon,I)=\bigcup_{k=1}^n E_k,\quad B(p+1,4\varepsilon,I)\subset\bigcup_{k=1}^n(E_k\cap F_k).$$

後は, $P(F_k|\ X_a)\le 2\widetilde{\alpha_\varepsilon}(b-a)$ と帰納法の仮定, Markov 性を $\mathcal{F}_a$ で用いて, 次を得る.

$$\begin{aligned} E[Z;B(p+1,4\varepsilon,I)] &\le \sum_{k=1}^n E[Z1_{E_k}P(F_k|\ X_a)]\le 2\widetilde{\alpha_\varepsilon}(b-a)\sum_{k=1}^n E[Z;E_k] \\ &= 2\widetilde{\alpha_\varepsilon}(b-a)E[Z;B(p,4\varepsilon,I)]\le EZ(2\widetilde{\alpha_\varepsilon}(b-a))^{p+1}. \end{aligned}$$

従って, 求める不等式を得る. ■