線形代数学 II (Linear Algebra II)

平場　誠示 (Seiji HIRABA)

2018 年 5 月 3 日

目 次

本テキストでは数ベクトルは縦ベクトルとして, 数ベクトルと行列を次のように表す.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

またスペースの関係で縦に書くのが面倒なときは転置の記号を用いて $\boldsymbol{a} = {}^t(a_1, \ldots, a_n)$ と表すこともある. また添字の範囲が分っているときは簡単に $\boldsymbol{a} = (a_i), A = (a_{ij})$ と表す.

1 計量ベクトル空間 (metric vector space)

1.1 内積，複素内積 (inner product, complex inner product)

V を $\mathbf{R}$ 上の n 次元ベクトル空間とする.

ちなみにベクトル空間とは和とスカラー倍が定義されていて, 和の結合則と可換性, 零元と逆元 (マイナス) の存在, 1 によるスカラー倍とスカラーの結合則と分配則がみたされている集合として定義される.

定義 1.1 $(\cdot,\cdot) : V \ni \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \mapsto (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \mathbf{R}$ が内積 **(inner product)**
$\overset{\text{def}}{\iff}$ ${}^\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in V, x \in \mathbf{R}$ に対し, (1) **対称性** $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$ (2) **線形性** $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$, $(x\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = x(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ (3) **非負性** $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \geq 0$,「$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0 \iff \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$」

問 1.1 上の定義から次を示せ. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$, $(\boldsymbol{a}, x\boldsymbol{b}) = x(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

内積 $(\cdot,\cdot)$ が与えられたベクトル空間 V を (正確には $(V, (\cdot,\cdot))$ と表し,) **計量ベクトル空間 (metric vector space)** という. また $\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}$ を $\boldsymbol{a}$ の長さという.

例 1 (1) $\mathbf{R}^n$ の内積＝**標準内積** $\boldsymbol{a} = (a_i), \boldsymbol{b} = (b_i) \in \mathbf{R}^n$, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1b_1 + \cdots a_nb_n$.
(2) $C(I)$ 区間 $I = [a, b] \subset \mathbf{R}$ 上の連続関数全体の内積 $f, g \in C(I), (f, g) = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx$.
(3) $\mathbf{R}[x]_{\leq n}$ n 次以下の多項式全体にも上と同じ内積が定義できる.
(4) $M_{m\times n}(\mathbf{R})$ 実 $m \times n$ 行列全体の内積 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbf{R})$,

$$(A, B) = \mathrm{tr}(A^tB) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{ij}$$

補題 1 (1) **シュワルツの不等式 (Schwarz's inequality)** $|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})| \leq \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$ (2) **三角不等式** $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\| \leq \|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|$

(1) は任意の $x \in \mathbf{R}$ に対し, $(x\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, x\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \geq 0$ と x についての 2 次式とみて, 判別式から容易に分り, (2) は (1) から得られる.

$\cos\theta = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})/(\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|)$ によって決まる $\theta \in [0, \pi]$ を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ **のなす角**という. また $\theta = 0$, i.e., $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$ のとき $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は**直交**するという.

補題 2 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \in V \setminus \{\boldsymbol{0}\}$: 互いに直交 $\Rightarrow$ これらは一次独立.

(証明) $x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_1\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$ とする. $\boldsymbol{a}_1$ との内積をとると $x_1(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1) = 0$. $\boldsymbol{a}_1 \neq 0$ より $x_1 = 0$. 同様にして $x_i = 0$ を得て, 一次独立となる. ■

V が $\mathbf{C}$ 上の n 次元ベクトル空間のときにも同様に内積が定義できる.

まず複素数について必要な性質を挙げておく.

虚数単位を $i = \sqrt{-1}$ とし, 複素数 $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbf{R})$ に対し, Re $z = x$: 実部, Im $z = y$: 虚部, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$: z の絶対値, また $\overline{z} = x - iy$: 複素共役に対し, 次が成立する.

補題 3 複素数 z, z_1, z_2 に対し, 次が成り立つ.
(1) $\overline{\overline{z}} = z$, $z\overline{z} = |z|^2$, $\mathrm{Re}\, z = (z+\overline{z})/2$, $\mathrm{Im}\, z = (z-\overline{z})/(2i)$,
(2) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$,
(3) $z \in \mathbf{R} \iff \overline{z} = z$.

問 上の補題を証明せよ.

定義 1.2 $(\cdot,\cdot) : V \ni \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \mapsto (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \mathbf{C}$ が**複素内積** or **エルミート内積 (hermitian −)** $\overset{\text{def}}{\iff}$ ${}^\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in V, z \in \mathbf{C}$ に対し, (1) **対称性** $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \overline{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})}$ (2) **線形性** $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$, $(z\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = z(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ (3) **非負性** $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \geq 0$, 「$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0 \iff \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$」

問 1.2 上の定義から次を示せ. $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$, $(\boldsymbol{a}, z\boldsymbol{b}) = \overline{z}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

内積 $(\cdot,\cdot)$ が与えられたベクトル空間 V を**複素計量ベクトル空間 (complex metric vector space)** といい, $\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}$ を $\boldsymbol{a}$ の長さという.
実計量ベクトル空間のときと同じように次が成り立つが, 証明は少し工夫が必要である.

補題 4 (1) **シュワルツの不等式** $|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})| \leq \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$ (2) **三角不等式** $\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\| \leq \|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|$

(証明) (1) 任意の $z \in \mathbf{C}$ に対し, $(z\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, z\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \geq 0$ なので, 展開し, $z = -\overline{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}/\|\boldsymbol{a}\|^2$ を代入すれば良い.
(2) は (1) とさらに $\mathrm{Re}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \leq |(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})|$ を用いれば得られる. ■

例 2 $\mathbf{C}^n$ の内積=標準内積 $\boldsymbol{a} = (a_i), \boldsymbol{b} = (b_i) \in \mathbf{C}^n$, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1\overline{b_1} + \cdots + a_n\overline{b_n}$.
また $c_1 > 0, \ldots, c_n > 0$ に対し, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = c_1 a_1 \overline{b_1} + \cdots + c_n a_n \overline{b_n}$ と定義しても内積となるので, 必ずしも内積は一つではないことに注意.

1.2 直交基底, 随伴行列とグラム行列 (orthogonal basis, adjoint matrix and Gram matrix)

以下, V を $\mathbf{R}$ or $\mathbf{C}$ 上の計量ベクトル空間とし, 内積を $(\cdot,\cdot)$ で表す.

定義 1.3 $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\} \subset V \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ が**直交系 (orthogonal system)** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $[i \neq j \Rightarrow (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = 0]$
更に全ての長さが 1 のとき, **正規直交系 (orthonormal system = ONS)** という.
また $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\} \subset V \setminus \{0\}$ が**直交基底 (orthogonal basis)** or **正規直交基底 (orthonormal basis = ONB)** $\overset{\text{def}}{\iff}$ 基底であり, かつ, 直交系 or 正規直交系.

定理 1 n 次元計量ベクトル空間 V の ONB を $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ とする. ${}^\forall \boldsymbol{a} \in V$,

$$\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 + \cdots + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{e}_n$$
$$\|\boldsymbol{a}\|^2 = |(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_1)|^2 + \cdots + |(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_n)|^2 \quad \text{(パーセバルの等式 (Parseval's equation))}$$

(証明) 殆ど明らか. 実際 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ が基底なので, $\boldsymbol{a} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$ と表せて, 正規直交系であることから $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_i) = x_i$ と $\|\boldsymbol{a}\|^2 = |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2$ を得る. ■
実はこの定理の証明から, 次の正規直交基底の作り方も分る.

定理 2 (シュミットの直交化法) n 次元計量ベクトル空間 V において, 正規直交基底 (ONB) はいつでも存在する.

(証明) まず n 次元であることから基底 $\{\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n\}\subset V$ が存在. そこで

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{\boldsymbol{b}_1}=\boldsymbol{a}_1, && \boldsymbol{b}_1=\widetilde{\boldsymbol{b}_1}/\|\widetilde{\boldsymbol{b}_1}\|,\\
&\widetilde{\boldsymbol{b}_2}=\boldsymbol{a}_2-(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1)\boldsymbol{b}_1, && \boldsymbol{b}_2=\widetilde{\boldsymbol{b}_2}/\|\widetilde{\boldsymbol{b}_2}\|,\\
&\cdots\\
&\widetilde{\boldsymbol{b}_n}=\boldsymbol{a}_n-(\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{b}_1)\boldsymbol{b}_1-\cdots-(\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{b}_{n-1})\boldsymbol{b}_{n-1}, && \boldsymbol{b}_n=\widetilde{\boldsymbol{b}_n}/\|\widetilde{\boldsymbol{b}_n}\|.
\end{aligned}
$$

とおけば, $\{\widetilde{\boldsymbol{b}_1},\dots,\widetilde{\boldsymbol{b}_n}\}$ が ONS で, $\{\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_n\}$ が ONB となる.

実際, 各 $\widetilde{\boldsymbol{b}_i}\neq 0$ は $\{\boldsymbol{a}_i\}$ の一次独立性から明らかで, まず,

$$(\widetilde{\boldsymbol{b}_2},\boldsymbol{b}_1)=(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1)-(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1)\|\boldsymbol{b}_1\|^2=0.$$

$i<j$ のとき, $\{\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_{j-1}\}$ が正規直交系であることを仮定すれば, $(\widetilde{\boldsymbol{b}_i},\widetilde{\boldsymbol{b}_j})=0$ も容易に確かめられるので帰納法により, 証明が終わる. ■

例題 1 $\mathbf{R}^4$ の基底 $\boldsymbol{a}_1={}^t(1,-1,1,-1),\boldsymbol{a}_2={}^t(0,2,0,2),\boldsymbol{a}_3={}^t(0,0,1,2),\boldsymbol{a}_4={}^t(0,0,0,5)$ から正規直交基底を構成せよ.

[解] 順次公式に当てはめていけば, $\|\boldsymbol{a}_1\|=2$ より, $\boldsymbol{b}_1={}^t(1,-1,1,-1)/2$, $\widetilde{\boldsymbol{b}_2}={}^t(1,1,1,1)$ より, $\boldsymbol{b}_2={}^t(1,1,1,1)/2$, $\widetilde{\boldsymbol{b}_3}={}^t(-1,-2,1,2)/2$ より, $\boldsymbol{b}_3={}^t(-1,-2,1,2)/\sqrt{10}$, $\widetilde{\boldsymbol{b}_4}={}^t(2,-1,-2,1)/2$ より, $\boldsymbol{b}_2={}^t(2,-1,-2,1)/\sqrt{10}$. ($\to$ この計算を確かめよ.)

定義 1.4 複素行列 A に対し, $A^*={}^t\overline{A}$ を A の**随伴行列 (adjoint matrix)** という. (A が実行列なら $A^*={}^tA$ は転置行列と同じである.)

明らかに $(AB)^*=B^*A^*$. また A が正方行列なら $\det(A^*)=\det({}^t\overline{A})=\det\overline{A}=\overline{\det A}$.

定義 1.5 計量ベクトル空間 V において, $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n\in V$ に対し, 行列 $((\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{a}_j))$ ((i,j) 成分が $(\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{a}_j)$ である行列) を $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n$ の**グラム行列 (Gram matrix)** という. その行列式を**グラム行列式**という.

定理 3 計量ベクトル空間 V の n 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n$ に対するグラム行列を A とすると, ${}^\exists B$: n 次行列; $A=BB^*$. 特に $\det A=|\det B|^2$ (≥ 0). また

$$「\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n \text{ が基底} \iff \det A>0」$$

(証明) V の ONB を $\{\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n\}$ とすると,

$$\boldsymbol{a}_i=(\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1+\cdots+(\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{e}_n=\sum_{k=1}^n(\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{e}_k)\boldsymbol{e}_k$$

より,

$$(\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{a}_j)=\left(\sum_{k=1}^n(\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{e}_k)\boldsymbol{e}_k,\boldsymbol{a}_j\right)=\sum_{k=1}^n(\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{e}_k)(\boldsymbol{e}_k,\boldsymbol{a}_j)=\sum_{k=1}^n(\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{e}_k)\overline{(\boldsymbol{a}_j,\boldsymbol{e}_k)}.$$

従って, $B=(b_{ij})$ を $b_{ij}=(\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{e}_j)$ ととれば, $(\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{a}_j)=\sum_{k=1}^n b_{ik}\overline{b_{jk}}$ となり, $A=BB^*$ をみたす. さらに $\det A=\det B\cdot\det B^*=\det B\cdot\overline{\det B}=|\det B|^2$. 次に, $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n$ が基底なら上の式から, ${}^tB$ は基底 $\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n$ から基底 $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n$ への変換行列となるので, 正則で, $\det A=|\det B|^2>0$. 逆に $\det A>0$ なら, 上で定めた B に対し, $\det B\neq 0$ で, 正則となり, この ${}^tB$ で基底 $\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n$ を変換すれば, $\sum_{k=1}^n b_{ik}\boldsymbol{e}_k=\boldsymbol{a}_i$ より, $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n$ が得られて, 基底となる. ■

1.3 直交行列とユニタリ行列，対称行列とエルミート行列 (orthogonal matrix and unitary matrix)

まず n 次元抽象ベクトル空間 $U = U_n$ から m 次元抽象ベクトル空間 $V = V_m$ への線形写像 f と表現行列 $A = (a_{ij})$ ($m \times n$ 行列) との関係について確認しておく.

まず普通の数ベクトルのときは $\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ を $U_n = \mathbf{R}^n$ の標準基底とし, $\{\boldsymbol{e}'_1, \dots, \boldsymbol{e}'_m\}$ を $V_m = \mathbf{R}^m$ の標準基底とすると

$$f(\boldsymbol{e}_j) = A\boldsymbol{e}_j = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \boldsymbol{e}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = a_{1j}\boldsymbol{e}'_1 + a_{2j}\boldsymbol{e}'_2 + \cdots + a_{mj}\boldsymbol{e}'_m$$

最後の式は $\boldsymbol{a}_j = {}^t(a_{1j}, \dots, a_{mj})$, i.e., $A = (\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n)$ として $(\boldsymbol{e}'_1, \dots, \boldsymbol{e}'_m)\boldsymbol{a}_j$ と表すことも出来る.

これを抽象化して, $\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ を U_n のある基底とし, $\{\boldsymbol{e}'_1, \dots, \boldsymbol{e}'_m\}$ を V_m のある基底として考えて, $f(\boldsymbol{e}_j) \in V_m$ をこの基底で展開する時の係数を次のようにおけば良いことになる.

$$\boxed{f(\boldsymbol{e}_j) = a_{1j}\boldsymbol{e}'_1 + a_{2j}\boldsymbol{e}'_2 + \cdots a_{mj}\boldsymbol{e}'_m = \sum_{k=1}^m a_{kj}\boldsymbol{e}'_k = (\boldsymbol{e}'_1, \dots, \boldsymbol{e}'_m)\boldsymbol{a}_j}$$

$\boldsymbol{e}_j$ を f で写したベクトルの係数が A の第 j 列となる. 即ち,

$$\boxed{(f(\boldsymbol{e}_1), \dots, f(\boldsymbol{e}_n)) = (\boldsymbol{e}'_1, \dots, \boldsymbol{e}'_m)(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n) = (\boldsymbol{e}'_1, \dots, \boldsymbol{e}'_m)A}$$

これにより, $f = f_A$ となる. (但し, これを縦に並べて書くと

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{e}_1) &= a_{11}\boldsymbol{e}'_1 + a_{21}\boldsymbol{e}'_2 + \cdots a_{m1}\boldsymbol{e}'_m \\ f(\boldsymbol{e}_2) &= a_{12}\boldsymbol{e}'_1 + a_{22}\boldsymbol{e}'_2 + \cdots a_{m2}\boldsymbol{e}'_m \\ &\vdots \\ f(\boldsymbol{e}_n) &= a_{1n}\boldsymbol{e}'_1 + a_{2n}\boldsymbol{e}'_2 + \cdots a_{mn}\boldsymbol{e}'_m \end{aligned}$$

となり, 係数の配置が **A の転置**になってしまうことに注意.)

基底を変えると表現行列が変わることに注意. 例えば実 n 次正方行列 A に対し, $f = f_A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ を考え, ある正則行列 $P = (\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_n)$ に対し, 基底を $\{\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_n\}$ に変えて考えると,

$$(f(\boldsymbol{p}_1), \dots, f(\boldsymbol{p}_n)) = (A\boldsymbol{p}_1, \dots, A\boldsymbol{p}_n) = AP = P(P^{-1}AP) = (\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_n)(P^{-1}AP).$$

このとき表現行列は $P^{-1}AP$ に変わる.

定義 1.6 計量ベクトル空間 V 上の線形変換 f が ${}^\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V, (f(\boldsymbol{a}), f(\boldsymbol{b})) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ をみたすとする. V が実計量ベクトル空間のとき f を**直交変換 (orthogonal transform)** といい, V が複素計量ベクトル空間のとき f を**ユニタリ変換 (unitary transform)** という.

定義 1.7 n 次実行列 A が**直交行列 (orthogonal matrix)** $\overset{\text{def}}{\iff}$ ${}^tAA = E_n$, i.e., $\sum_k a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij}$.
n 次複素行列 A が**ユニタリ行列 (unitary matrix)** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $A^*A = E_n$, i.e., $\sum_k \overline{a_{ki}}a_{kj} = \delta_{ij}$.

実は ${}^tAA = E_n$ なら $A{}^tA = E_n$ も成り立つ. $A^*A = E_n$ なら $AA^* = E_n$ も同様. (これは後で述べる**正規行列 (normal matrix)** に含まれる.)

問　何故か答えよ.

問 1.3 A が直交行列 (or ユニタリ行列) なら $|\det A| = 1$, $A^{-1} = {}^tA$ (or $A^{-1} = A^*$) を示せ.

問 1.4 A, B が直交行列 or ユニタリ行列なら AB もそうを示せ.

定理 4 計量ベクトル空間 V 上の線形変換 f に対し, V の一組の正規直交基底についての f の表現行列を A とする.

$$[f \text{ がユニタリ変換} \iff A \text{ がユニタリ行列}]. \quad \text{同様に} \quad [f \text{ が直交変換} \iff A \text{ が直交行列}].$$

(証明) ユニタリ変換のときのみ示す. $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ を一組の ONB とし, $f(\boldsymbol{e}_i) = \sum_{k=1}^n a_{ki}\boldsymbol{e}_k$ として $A = (a_{ij})$ とする.

$$(f(\boldsymbol{e}_i), f(\boldsymbol{e}_j)) = \left(\sum_{k=1}^n a_{ki}\boldsymbol{e}_k, \sum_{\ell=1}^n a_{\ell j}\boldsymbol{e}_\ell\right) = \sum_{k=1}^n\sum_{\ell=1}^n a_{ki}\overline{a_{\ell j}}(\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_\ell) = \sum_{k=1}^n a_{ki}\overline{a_{kj}}.$$

従って f がユニタリ変換なら $\delta ij = \sum_{k=1}^n a_{ki}\overline{a_{kj}}$ となり, これは $A^*A = E_n$ を意味する.

逆に A がユニタリ行列とすると, $(f(\boldsymbol{e}_i), f(\boldsymbol{e}_j)) = \sum_{k=1}^n a_{ki}\overline{a_{kj}} = \delta ij$ が成り立つ. そこで $\boldsymbol{x} = \sum x_i\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{y} = \sum y_i\boldsymbol{e}_i$ とすると $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum x_i y_i$. 一方, 一つ上の式から $(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) = \sum_{i,j} x_i y_j (f(\boldsymbol{e}_i), f(\boldsymbol{e}_j)) = \sum_i x_i y_i$ となり, $(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を得る. ■

定義 1.8 計量ベクトル空間 V 上の線形変換 f が**対称変換 (symmetric transform)** $\overset{\text{def}}{\iff}$ ${}^\forall\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V, (f(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, f(\boldsymbol{b}))$

定義 1.9 n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ が**対称行列 (symmmetric matrix)** $\overset{\text{def}}{\iff}$ ${}^tA = A \iff a_{ij} = a_{ji}$. 特に A が実なら**実対称行列**という. また $A = (a_{ij})$ が**エルミート行列 (hermitian matrix)** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $A^* = A \iff a_{ij} = \overline{a_{ji}}$.

問 1.5 A: エルミートなら $\det A$ は実数, また逆行列があればそれもエルミートを示せ.

問 1.6 A が正方行列なら ${}^{\exists_1}B, C$: エルミート; $A = B + iC$ を示せ. $(A^* = B - iC)$

定理 5 (1) n 次実行列 A とその線形写像 $f_A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ について, $\mathbf{R}^n$ に標準内積を入れて実計量ベクトル空間とみるとき, $[f_A$ が対称変換 $\iff A$ が対称行列$]$.

(2) n 次複素行列 A とその線形写像 $f_A : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ について, $\mathbf{C}^n$ に標準内積を入れて複素計量ベクトル空間とみるとき, $[f_A$ が対称変換 $\iff A$ がエルミート行列$]$.

(証明) (2) のみを示す. $A = (a_{ij})$ とすると $(f_A(\boldsymbol{e}_i), \boldsymbol{e}_j) = (A\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = a_{ji}$, $(\boldsymbol{e}_i, f_A(\boldsymbol{e}_j)) = (\boldsymbol{e}_i, A\boldsymbol{e}_j) = \overline{a_{ji}}$ より明らか. ■

2 直和 (direct sum)

2.1 直積，部分空間の和 (product, sum of subspaces)

定義 2.1 ベクトル空間 U, V に対し, $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \in U \times V \overset{\text{def}}{\iff} \boldsymbol{a} \in U, \boldsymbol{b} \in V$ とおく. $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], [\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}'] \in U \times V$ に対し

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = [\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}'] \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}', \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}.$$

また和とスカラー積を次で定義する.

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] + [\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}'] = [\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}', \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}'], \quad x[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = [x\boldsymbol{a}, x\boldsymbol{b}].$$

これにより $U \times V$ はベクトル空間となり, これを U と V の**直積空間 (product space)** という. さらに一般に n 個のベクトル空間 $U_1, \ldots, U_n$ の直積空間 $U_1 \times \cdots \times U_n \ni [\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n]$ が同様に定義される.

定理 6 $\dim U \times V = \dim U + \dim V$.

(証明) U の基底 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_r$ と V の基底 $\boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_s$ により, $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{0}], \ldots, [\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{0}], [\boldsymbol{0}, \boldsymbol{e}'_1], \ldots, [\boldsymbol{0}, \boldsymbol{e}'_s]$ が $U \times V$ の基底となることから明らか. ■

定義 2.2 ベクトル空間 V の部分空間 U_1, U_2 に対し,

$$\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 \in U_1 + U_2 \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad \boldsymbol{a}_1 \in U_1, \boldsymbol{a}_2 \in U_2$$

と定義し, U_1 と U_2 の**和 (sum)** という.

この和 $U_1 + U_2$ は U_1, U_2 を含む V 最小の部分空間である.
例 $U_1 = \mathbf{L}(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r), U_2 = \mathbf{L}(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_r)$ なら $U_1 + U_2 = \mathbf{L}(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_r)$.

補題 5 V の部分空間 U_1, U_2 の直積 $U_1 \times U_2$ を考える.

(1) 自然に定義される線形写像 $f : U_1 \times U_2 \to U_1 + U_2$ があり, これは全射.

(2) (1) の写像 f が同型 $\iff U_1 \cap U_2 = \{\boldsymbol{0}\}$.

(証明) (1) $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \in U_1 \times U_2$ に対し, $f([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ とおけば, 線形性も全射性も明らか.
(2) (1) より, f: 単射 $\iff U_1 \cap U_2 = \{\boldsymbol{0}\}$ を示せば良い. まずもし f: 単射なら $\mathrm{Ker}\, f = \{[\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}]\}$ で, $\boldsymbol{a} \in U_1 \cap U_2$ に対し, $[\boldsymbol{a}, -\boldsymbol{a}] \in \mathrm{Ker}\, f = \{[\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}]\}$ より, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$. ゆえに $U_1 \cap U_2 = \{\boldsymbol{0}\}$. 逆にこのとき, $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \in U_1 \times U_w$ に対し, $\boldsymbol{0} = f([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ なら $\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{b} \in U_1 \cap U_2 = \{\boldsymbol{0}\}$ となり, $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = [\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}]$. よって $\mathrm{Ker}\, f = \{[\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}]\}$ となり, f: 単射. ■

定義 2.3 V の部分空間 U_1, U_2 が $U_1 \cap U_2 = \{\boldsymbol{0}\}$ をみたすとき, その和 $U_1 + U_2$ を $U_1 \oplus U_2$ と表し, U_1, U_2 の**直和 (direct sum)** という.

定理 7 V の部分空間 U_1, U_2 に対し, 以下は全て同値.

(1) $U_1 + U_2 = U_1 \oplus U_2$.

(2) $U_1 + U_2$ は $U_1 \times U_2$ と同型.

(3) $U_1 \cap U_2 = \{\mathbf{0}\}$.

(4) $\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$.

(5) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in U_1 + U_2$ $(\boldsymbol{a} \in U_1, \boldsymbol{b} \in U_2)$ の表現は一意的.

(6) $\boldsymbol{a} \in U_1, \boldsymbol{b} \in U_2$ に対し, $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \mathbf{0} \Longrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} = \mathbf{0}$.

(証明) 定義と前の補題から (1), (2), (3) の同値性は明らか. さらに前定理から $\dim(U_1 \times U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$ なので, (2) から (4) をえる. 逆に (4) を仮定すると, 前の補題の写像 $f : U_1 \times U_2 \to U_1 + U_2$ に対し, 次元公式から

$$\dim(U_1 + U_2) + \dim \mathrm{Ker}\ f = \dim(U_1 \times U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$$

で, (4) から $\dim \mathrm{Ker}\ f = 0$, i.e., $\mathrm{Ker}\ f = \{\mathbf{0}\}$ となり, f は単射で, 全射性は前の捕題で示されてるので, 同型となり, (2) をえる. 次に (5) $\Rightarrow$ (6) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (5) を示す. (5) は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}' \in U_1, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}' \in U_2$ に対し, $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{b}' \Rightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}', \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}'$ が成り立つことを意味するので, ${}^{\forall}\boldsymbol{a} \in U_1, {}^{\forall}\boldsymbol{b} \in U_2$ に対し, $\boldsymbol{a}' = \mathbf{0} \in U_1, \boldsymbol{b}' = \mathbf{0} \in U_2$ とすれば, $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}, \boldsymbol{b} = \mathbf{0}$ を得るので, (6) が成り立つ. (6) を仮定すると $\boldsymbol{a} \in U_1 \cap U_2$ に対し, $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}$ より, $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$ となり, (3) を得る. 最後に (3) を仮定し, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}' \in U_1, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}' \in U_2$ に対し, $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{b}'$ とすると $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}' = \boldsymbol{b}' - \boldsymbol{b} \in U_1 \cap U_2 = \{\mathbf{0}\}$ となり, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}', \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}'$ を得て, (5) が成り立つ. ■

n 個の直和についても同様に定義できて, 上の定理と同様な結果が成り立つ.

定義 2.4 V の部分空間 $U_1, \dots, U_r$ に対し, その和 $U_1 + \cdots + U_r$ が次をみたすとき, $U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$ と表し, $U_1, \dots, U_r$ の**直和 (direct sum)** という.

$$1 \le {}^{\forall}i < r, (U_1 + \cdots + U_i) + U_{i+1} = (U_1 + \cdots + U_i) \oplus U_{i+1}$$

定理 8 V の部分空間 $U_1, \dots, U_r$ に対し, 以下は全て同値.

(1) $U_1 + \cdots + U_r = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$.

(2) $U_1 + \cdots + U_r$ は $U_1 \times \cdots \times U_r$ と同型.

(3) $1 \le {}^{\forall}i < r, (U_1 + \cdots + U_r) \cap U_{i+1} = \{\mathbf{0}\}$.

(4) $\dim(U_1 + \cdots + U_r) = \dim U_1 + \cdots + \dim U_r$.

(5) $\boldsymbol{a}_1 + \cdots + \boldsymbol{a}_r \in U_1 + \cdots + U_r$ $(\boldsymbol{a}_i \in U_i, 1 \le i \le r)$ の表現は一意的.

(6) $\boldsymbol{a}_1 \in U_1, \dots, \boldsymbol{a}_r \in U_r$ に対し, $\boldsymbol{a}_1 + \cdots \boldsymbol{a}_r = \mathbf{0} \Longrightarrow \boldsymbol{a}_1 = \cdots = \boldsymbol{a}_r = \mathbf{0}$.

V の部分空間 $U_1, \dots, U_r$ を選んで, $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$ とできるとき, これを V の**直和分解**という.

2.2 直交補空間 (orthogonal complement)

定義 2.5 V を計量ベクトル空間とする. V の部分空間 U に対し,

$$U^\perp = \{\boldsymbol{a} \in V; {}^\forall \boldsymbol{x} \in U, (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = 0\}$$

とおき, これを U の **直交補空間 (orthogonal complement)** という.

問 $U^\perp$ が部分空間であることを確かめよ.

定理 9 計量ベクトル空間 V の部分空間 U に対し, 直和分解 $V = U \oplus U^\perp$ が成り立つ. 従って $\dim V = \dim U + \dim U^\perp$ も成り立つ.

(証明) U の ONB を $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_r\}$ とすると, $[\boldsymbol{c} \in U^\perp \iff {}^\forall i \le r, (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{e}_i) = 0]$. そこで $\boldsymbol{a} \in V$ に対し, $\boldsymbol{b} = \sum_{i \le r} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{e}_i \in U$ を考えると, $(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}, \boldsymbol{e}_i) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_i) - (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{e}_i) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_i) - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_i) = 0$, 即ち, $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \in U^\perp$ となるので, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \in U + U^\perp$, i.e., $V = U + U^\perp$ を得る. また $\boldsymbol{a} \in U \cap U^\perp$ なら $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0$ となり, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ をえるので, $U \cap U^\perp = \{\boldsymbol{0}\}$. よって $V = U \oplus U^\perp$. 前の定理から最後の次元についての式も成り立つ. ■

問 2.1 計量ベクトル空間 V の部分空間 U に対し, $(U^\perp)^\perp = U$ を示せ.

$U \subset (U^\perp)^\perp$ は容易で, 逆は次元から分る.

問 2.2 $\mathbf{C}^3$ の標準内積で, $\boldsymbol{a} = {}^t(1, i, 0)$ に対し, 部分空間 $U = \mathbf{L}(\boldsymbol{a})$ の直交補空間を求めよ.

$U^\perp = \mathbf{L}({}^t(i, 1, 0), {}^t(0, 0, 1))$

2.3 線形変換の安定部分空間 (stable subspaces of linear transforms)

この節での内容は 4 章の対角化の中の正規行列の対角化可能定理の証明と 7 章のジョルダンの標準形の定理の証明で必要となる.

以下では V は計量ベクトル空間である必要はない.

定義 2.6 ベクトル空間 V 上の線形変換 f と V の部分空間 U に対し, U が V の f **安定 (stable)** (部分空間) $\overset{\text{def}}{\iff} f(U) \subset U$.

明らかに V や $\{\boldsymbol{0}\}$ は f 安定である.

定理 10 V の基底 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ を初めの r 個が部分空間 U の基底となるようにとっておく. このとき V 上の線形変換 f のこの基底に関する表現行列を A とすると, U が f 安定 $\iff$

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & * \\ O & A_2 \end{pmatrix}$$

但し, A_1 は r 次正方行列で, A_2 は $n - r$ 次正方行列.

(証明) A が $(f(\boldsymbol{e}_1),\dots,f(\boldsymbol{e}_n)) = (\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n)A$, i.e., $f(\boldsymbol{e}_j) = \sum_{k=1}^n \boldsymbol{e}_k a_{kj}$ をみたしていることに注意すれば, ほぼ明らか. 実際 A が上の形のとき, $1 \le i \le r$ に対し, $f(\boldsymbol{e}_i)$ は $\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_r$ の一次結合として表されるので, $f(\boldsymbol{e}_i) \in U$, i.e., $f(U) \subset U$. よって U は f 安定. 逆に U が f 安定なら, $1 \le i \le r$ に対し, $f(\boldsymbol{e}_i)$ を $\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n$ の一次結合として表したとき, $\boldsymbol{e}_{r+1},\dots,\boldsymbol{e}_n$ の係数は 0 でなければならないので, A は定理の中の形で与えられる. ■

上と同様にいくつかの部分空間についても次が証明される.

定理 11 ベクトル空間 V の部分空間の列 $W_1 \subset W_2 \subset \cdots \subset W_s = V$ があるとき, V の基底 $\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n$ を $1 \le i \le s$ に対し, 初めの r_i 個が W_i の基底となるようにとっておく. このとき V 上の線形変換 f のこの基底に関する表現行列を A とすると, 各 W_i が全て f 安定 $\iff$

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & * & * & * \\ & A_2 & * & * \\ & O & \ddots & * \\ & & & A_s \end{pmatrix}$$

但し, 各 A_i は $r_i - r_{i-1}$ 次正方行列 $(r_0 = 0)$.

問 上の定理の証明を与えよ.

定理 12 V が $V = U_1 \oplus U_2$ と直和分解されているとき $r = \dim U_1, n - r = \dim U_2$ とする. また V の基底 $\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n$ を初めの r 個が部分空間 U_1 の基底となるようにとっておく. (当然, 後ろの $n-r$ 個は U_2 の基底となる.) このとき V 上の線形変換 f のこの基底に関する表現行列を A とすると, U_1, U_2 が f 安定 $\iff$

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$$

但し, A_1 は r 次正方行列で, A_2 は $n-r$ 次正方行列.

(証明) まず前の定理から U_1 が f 安定 $\iff A = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ O & A_2 \end{pmatrix}$. 更に U_2 も f 安定なら, $r+1 \le i \le n$ に対し, $f(\boldsymbol{e}_i)$ を $\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n$ の一次結で表したとき, $\boldsymbol{e}_q,\dots,\boldsymbol{e}_r$ の係数は 0 なので, $B = O$. 逆に $B = O$ なら U_2 が f 安定なることも同様. ■

ここから先, (2 次形式までの) 主な目標としては, **『正定値実対称行列は正の固有値をもち, 適当な直交行列によって対角化でき, その対角成分は固有値となる』** という結果の証明の流れを理解することであるが, 当面, 前期後半の目標として, 実対称行列やエルミート行列, 直交行列, ユニタリ行列を含む **『正規行列がユニタリ行列によって対角化できる』** ことを理解してもらいたい.

3 固有値 (eigen values)

3.1 固有値と固有空間, 固有多項式 (eigen value and eigen space, eigen polynomial)

定義 3.1 ベクトル空間 V 上の線形変換 f に対し, $\lambda \in \mathbf{C}$ が f の**固有値 (eigen value)** $\overset{\text{def}}{\iff}$ ${}^\exists \boldsymbol{a} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}; f(\boldsymbol{a}) = \lambda \boldsymbol{a}$. またこの $\boldsymbol{a}$ を固有値 λ に属する f の**固有ベクトル (eigen vector)** という.

また n 次正方行列 A に対しても, 同様に, $\lambda \in \mathbf{C}$ が A の**固有値** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^\exists \boldsymbol{a} \in \mathbf{C} \setminus \{\mathbf{0}\}; A\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a}$. またこの $\boldsymbol{a}$ を固有値 λ に属する A の**固有ベクトル**という.

定義 3.2 ベクトル空間 V 上の線形変換 f の固有値 $\lambda \in \mathbf{C}$ に対し,

$$V_\lambda = \{\boldsymbol{a} \in V; f(\boldsymbol{a}) = \lambda\boldsymbol{a}\} = \mathrm{Ker}\ (\lambda \cdot id_V - f)$$

を固有値 λ に属する f の**固有空間 (eigen space)** という. これは V の部分空間である. ($\to$ 確かめよ.)

例 3 (1) $A = \mathrm{diag}\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ ($\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ を対角成分にもつ対角行列) なら, $\mathbf{C}^n$ の基本ベクトル $\boldsymbol{e}_j$ によって, $A\boldsymbol{e}_j = \lambda_j \boldsymbol{e}_j$.

(2) $\mathbf{C}[x]_{\leq n}$: n 次以下の複素係数の多項式全体において, $f = xd_x : p(x) \mapsto xp'(x)$ を考えると明らかに線形変換で ($\to$ 確かめよ.) $0 \leq k \leq n$ に対し, $f(x^k) = kx^k$ より, 固有値 k, 固有ベクトル x^k となる.

定理 13 n 次正方行列 A に対し, 次が成立する.

(1) λ が A の固有値 $\Longleftrightarrow$ $\det(\lambda E_n - A) = 0$.

(2) λ が A の固有値のとき, それに属する固有空間は

$$V_\lambda = \{\boldsymbol{a} \in \mathbf{C}^n; (\lambda E_n - A)\boldsymbol{a} = \mathbf{0}\} = \mathrm{Ker}\ (\lambda E_n - A).$$

(3) 固有値 λ に対し, $\dim V_\lambda = n - \mathrm{rank}\ (\lambda E_n - A)$.

(証明) (1) ${}^\exists \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}; A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \Longleftrightarrow (\lambda E_n - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \mathrm{rank}\ (\lambda E_n - A) < n \Longleftrightarrow$ $\lambda E_n - A$ が正則でない $\Longleftrightarrow \det(\lambda E_n - A) = 0$.

(2) $f = f_A$ とすれば定義より明らか.

(3) $g = g_{\lambda E_n - A}$ とすれば, $V_\lambda = \mathrm{Ker}\ g$. よって次元公式から $\dim V_\lambda = n - \dim \mathrm{Im}\ g$. また $\dim \mathrm{Im}\ g = \mathrm{rank}\ (\lambda E_n - A)$ なので求める式を得る. ■

上の定理により, x についての n 次方程式 $\det(xE_n - A) = 0$ の解が固有値となる. 従って, 固有値は高々 n 個しかない.

定義 3.3 n 次正方行列 A に対し, 次の x の n 次多項式 $\chi_A(x)$ を A の**固有多項式 (eigen polynomial)** といい, $\chi_A(x) = 0$ を A の**固有方程式 (eigen equation)** という.

$$\chi_A(x) = \det(xE_n - A) = \begin{vmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & x - a_{nn} \end{vmatrix}.$$

三角行列 A の対角成分が $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ なら, 固有多項式は $\chi_A(x) = (x - a_{11})(x - a_{22}) \cdots (x - a_{nn})$ で, 対角成分が固有値となる.

定義 3.4 正方行列 A, B に対し,

$A \approx B$: A と B が **相似 (similar)** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^\exists P$: 正則行列; $A = P^{-1}BP$.

定理 14 $A \approx B$ のとき, $\chi_A(x) = \chi_B(x)$. 従って A と B の固有値は一致する. さらに固有値を $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ とすると $\mathrm{tr}\ A = \mathrm{tr}\ B = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$, $\det A = \det B = \lambda_1 \cdots \lambda_n$.

(証明) $A = P^{-1}BP$ なら $xE_n - A = xE_n - P^{-1}BP = P^{-1}(xE_n - B)P$ より, $\det(xE_n - A) = \det(P^{-1}) \det(xE_n - B) \det P = (\det P)^{-1} \det(xE_n - B) \det P = \det(xE_n - B)$.

後半は $\det(xE_n - A) = \chi_A(x) = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_n)$ より, 両辺で x^{n-1} の係数を考えると, $-(a_{11} + \cdots + a_{nn}) = -(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$. また定数項を考えれば, $(-1)^n \det A = \chi_A(0) = (-1)^n \lambda_1 \cdots \lambda_n$. さらに固有方程式が同じなので A を B に変えても同じ結果を得る. ■

3.2 ケーリー・ハミルトンの定理とフロベニウスの定理 (Cayley-Hamilton's theorem and Frobenius's theorem)

定理 15 (フロベニウスの定理) n 次行列 A の固有値を (重複も込めて) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ とする. このとき任意の多項式 $p(x)$ に対し, n 次行列 $p(A)$ の固有値は (重複も込めて) $p(\lambda_1), \dots, p(\lambda_n)$ となる. 特に

$$\mathrm{tr}\ p(A) = p(\lambda_1) + \cdots + p(\lambda_n), \quad \det p(A) = p(\lambda_1) \cdots p(\lambda_n),$$

定理 16 (ケーリー・ハミルトンの定理) n 次行列 A に対し, $\chi_A(A) = O$.

これらの定理の証明に次の三角化定理を用いる.

定理 17 (三角化定理) 任意の n 次行列 A は上三角行列と相似である. 即ち, A の固有値を $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ として $^\exists P$: 正則行列;

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & * & \\ & O & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

(証明) n についての帰納法で示す. $n = 1$ なら明らかに成り立つ. そこで $n - 1$ 次では成り立つと仮定する. A の固有値 λ_1 と対応する固有ベクトル $\boldsymbol{q}_1 \neq \boldsymbol{0}$ をとる. これに適当にベクトルを加えて, 基底 $\boldsymbol{q}_1, \dots, \boldsymbol{q}_n$ を作り, $Q = (\boldsymbol{q}_1, \dots, \boldsymbol{q}_n)$ とおく. $A\boldsymbol{q}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{q}_1$ より, この基底に関する f_A の表現行列を考えると, ある $(n-1)$ 次行列 A_1 があり,

$$AQ = A(\boldsymbol{q}_1, \dots, \boldsymbol{q}_n) = (\boldsymbol{q}_1, \dots, \boldsymbol{q}_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & A_1 \end{pmatrix}, \quad \text{i.e,} \quad Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & A_1 \end{pmatrix}.$$

ここで A_1 に対し, 帰納法の仮定から $^\exists R_1$: $(n-1)$ 次正則行列; $R_1^{-1}A_1R_1$ は上三角行列. そこで $R = \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & R_1 \end{pmatrix}$ とし, $P = QR$ とおけばこれが条件を満たすことが分る. 実際, $R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & R_1^{-1} \end{pmatrix}$ より,

$$R^{-1}Q^{-1}AQR = \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & R_1^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & R_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & R_1^{-1}A_1R_1 \end{pmatrix}.$$

■

[フロベニウスの定理の証明]
三角化定理の $B = P^{-1}AP$ をとると

$$B^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & * & \\ & O & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

これから多項式 $p(x) = c_0x^m + c_1x^{m-1} + \cdots + c_{m-1}x + c_m$ に対し,

$$\begin{aligned} P^{-1}p(A)P &= P^{-1}(c_0A^m + c_1A^{m-1} + \cdots + c_{m-1}A + c_mE_n)P \\ &= c_0B^m + c_1B^{m-1} + \cdots + c_{m-1}B + c_mE_n \\ &= \begin{pmatrix} p(\lambda_1) & & & \\ & p(\lambda_2) & * & \\ & O & \ddots & \\ & & & p(\lambda_n) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

従って $P^{-1}p(A)P$ の固有値は $p(\lambda_1), \ldots, p(\lambda_n)$ で, 相似な $p(A)$ の固有値も同じとなる. 後半も前の定理から従う. ■

[ケーリー・ハミルトンの定理の証明]
上と同じ上三角行列 $B = P^{-1}AP$ をとる. 固有多項式は一致する $\chi_A(x) = \chi_B(x)$ から

$$\chi_B(B) = \chi_A(P^{-1}AP) = P^{-1}\chi_A(A)P.$$

従って, 初めから A を $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ を対角成分に持つ上三角として考えれば良い. このとき

$$\chi_A(A) = (A - \lambda_1E_n)\cdots(A - \lambda_nE_n)$$

で, $C_i = A - \lambda_iE_n$ とおくと, (i,i) 成分が 0 の上三角なので, C_1 の第 1 列は $\mathbf{0}$, C_1C_2 の第 1, 2 列は $\mathbf{0}$, $C_1C_2C_3$ の第 1 〜 3 列は $\mathbf{0}$, というように計算して $C_1\cdots C_n = O$ を得る. ■

3.3 代数学の基本定理 (fundamental theorem in algebra)

定理 18 (代数学の基本定理) 変数 x についての複素係数の n 次多項式

$$f(x) = c_0x^n + c_1x^{n-1} + \cdots + c_{n-1}x + c_n \quad (c_0 \neq 0)$$

に対し, ${}^\exists\lambda \in \mathbf{C}; f(\lambda) = 0$.

この定理から, $f(x)$ を $x - \lambda$ で割り, 商と余りを考えることにより, 次の系をえる.

系 1 変数 x についての複素係数の n 次多項式は n 個の一次式の積に因数分解する. 即ち, $f(x) = c_0(x - \lambda_1)\cdots(x - \lambda_n)$ $(\lambda_i \in \mathbf{C})$.

[代数学の基本定理の証明]

(1st step) 「$^\forall c \in \mathbf{C}, {}^\exists z \in \mathbf{C}; z^n = c$ (n 乗根の存在).」 明らかだが, $c = re^{i\theta}$ ($r = |c|, \theta = \arg c$) とすると, $z = r^{1/n}e^{i\theta/n}$ が解.

(2nd step) 与えられた多項式 $f(z)$ に対し, $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = \infty$ より, 「$^\forall L \geq 0, {}^\exists M > 0; |^\forall z| > M, |f(z)| > L$.」

(3rd step) 「$|f(z)|$ は $\mathbf{C}$ 上で最小値をとる.」 $|f(0)| = |c_n|$ より, 2nd step で $L = |c_n|$ として, $^\exists M > 0; |^\forall z| > M, |f(z)| > |f(0)|$. 従って $|f(z)|$ は最小値を持つなら $|x| \leq M$ の閉円盤内となるが, 連続関数は有界閉集合で最小値を持つので, 結局, そこで全体の最小値を持つことになる.

(4th step) 定理を示す. 上のことから, $^\exists \lambda \in \mathbf{C}; |f(\lambda)|$ が $|f(z)|$ の最小値. $f(\lambda) = 0$ を示したい. 必要なら $x' = x - \lambda$ と変数を置き換えることにより, 初めから $\lambda = 0$ としてよい. 即ち, $|f(0)| = |c_n|$ が最小値で, これが 0 であることを示したい. 背理法で示す. $c_n \neq 0$ とする. c_n の次に 0 でない係数を c_{n-r} とすると, $f(x) = c_n + c_{n-r}x^r + x^{r+1}g(x)$, 但し $g(x)$ は $(n-r-1)$ 次以下の多項式. (少なくとも $c_0 \neq 0$ なので, そのような c_{n-r} は存在する. もし $r = n$ なら $g(x) = 0$, i.e., $f(x) = c_n + c_0x^n$.) そこで $\omega = (-c_n/c_{n-r}$ の r 乗根) とすると, $0 < t < 1$ に対し,

$$f(t\omega) = c_n + c_{n-r}t^r\omega^r + t^{r+1}\omega^{r+1}g(t\omega) = c_n(1-t^r) + t^r(t\omega^{r+1}g(t\omega)).$$

よって

$$|f(t\omega)| \leq |c_n|(1-t^r) + t^r|t\omega^{r+1}g(t\omega)|.$$

ここで $\lim_{t\to0} |t\omega^{r+1}g(t\omega)| = 0$ と $|c_n| > 0$ より, t が十分小なら, $|t\omega^{r+1}g(t\omega)| < |c_n|$ とできる. 従って

$$|f(t\omega)| < |c_n|(1-t^r) + t^r|c_n| = |c_n|$$

となり, $|f(0)| = |c_n|$ が最小値であったことに矛盾する. 以上により, $c_n = 0$ を得る. ■

4 対角化 (diagonalize)

4.1 対角化可能行列 (diagonalizable matrix)

定義 4.1 正方行列において対角成分以外が全て 0 のものを**対角行列 (diagonal matrix)** という. 特に零行列も対角行列である.

定義 4.2 n 次正方行列 A が**対角化可能 (diagonalizable)** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $^\exists P$: n 次正則行列; $P^{-1}AP$ が対角行列. このとき P を A の **対角化行列 (diagonalize matrix)** という.

定理 19 n 次正方行列 A に対し, 次は同値.

(1) A は対角化可能

(2) $\mathbf{C}^n$ の基底として A の固有ベクトルからなるものがとれる.

(3) A の異なる固有値の全てを $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, それぞれの固有値に属する固有空間を $V_{\lambda_1}, \ldots, V_{\lambda_r}$ とするとき, $\mathbf{C}^n = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_r}$.

(証明) まず (1) $\Longleftrightarrow$ (2) を示す.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{pmatrix} =: \mathrm{diag}\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

のとき, $\mathbf{C}^n$ の基底として, P の列ベクトル $\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_n$ をとり, f_A のこの基底に関する表現行列を考えると

$$A(\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_n) = AP = P(P^{-1}AP) = (\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

即ち, $A\boldsymbol{p}_i = \lambda_i \boldsymbol{p}_i$. これは基底ベクトル $\boldsymbol{p}_i$ が固有値 λ_i に属する固有ベクトルであることを意味する. 逆に $\mathbf{C}^n$ の基底として A の固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_n$ がとれるとき, $A\boldsymbol{p}_i = \lambda_i \boldsymbol{p}_i$ から, $P = (\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_n)$ (正則となる) として, $AP = P\ \mathrm{diag}\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, i.e., $P^{-1}AP = \mathrm{diag}\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

(3) $\Rightarrow$ (2) は固有空間が固有ベクトルから生成されるので明らか.

(2) $\Rightarrow$ (3) について. (2) の固有ベクトルからなる基底をとり, その中で固有値 λ_i に属するものだけをとり, それで生成される部分空間を W_{λ_i} とすると, $\mathbf{C}^n = W_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus W_{\lambda_r}$ は成り立つ. 明らかに $W_{\lambda_i} \subset V_{\lambda_i}$ なので, $\mathbf{C}^n = V_{\lambda_1} + \cdots + V_{\lambda_r}$. これが直和であれば良いが, それは次の定理から成り立つ. ■

定理 20 n 次正方行列 A のいくつかの異なる固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ とそれぞれの固有値に属する固有空間を $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_r}$ とする. 固有空間の和は直和, i.e., $V_{\lambda_1} + \cdots + V_{\lambda_r} = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_r}$. 従って, 各固有ベクトル $\boldsymbol{a}_i \in V_{\lambda_i}$ をとると, $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_r$ は一次独立.

(証明) $\boldsymbol{b}_1 + \cdots + \boldsymbol{b}_r = \mathbf{0}$ $(\boldsymbol{b}_i \in V_{\lambda_i})$ として, $\boldsymbol{b}_1 = \cdots = \boldsymbol{b}_r = \mathbf{0}$ を示せば良い. 帰納法で示す. $r = 1$ のときは明らか. $r \geq 2$ で, $r - 1$ で成り立っているとする. 仮定の式の両辺に A を左からかけて, $\lambda_1 \boldsymbol{b}_1 + \cdots + \lambda_r \boldsymbol{b}_r = A(\boldsymbol{b}_1 + \cdots + \boldsymbol{b}_r) = A\mathbf{0} = \mathbf{0}$. またこの式から, 仮定の式に λ_r をかけたものを引いて, $(\lambda_1 - \lambda_r)\boldsymbol{b}_1 + \cdots + (\lambda_{r-1} - \lambda_r)\boldsymbol{b}_{r-1} = \mathbf{0}$. 帰納法の仮定から $(\lambda_1 - \lambda_r)\boldsymbol{b}_1 = \cdots = (\lambda_{r-1} - \lambda_r)\boldsymbol{b}_{r-1} = \mathbf{0}$. 固有値は異なるので, $\boldsymbol{b}_1 = \cdots = \boldsymbol{b}_{r-1} = \mathbf{0}$ で, 仮定の式から $\boldsymbol{b}_r = \mathbf{0}$ も得る. 最後の一次独立性は直和の性質から明らか. ■

系 2 n 次正方行列 A が異なる n 個の固有値をもつなら, 対角化可能.

4.2 ユニタリ行列とエルミート行列の固有値 (eigen values of unitary matrix and hermitian matrix

まず標準内積 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = {}^t\boldsymbol{a}\overline{\boldsymbol{b}}$ に対し, 一般に次が成り立つことを注意しておく.

$$(A\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = {}^t(A\boldsymbol{a})\overline{\boldsymbol{b}} = {}^t\boldsymbol{a}{}^tA\overline{\boldsymbol{b}} = {}^t\boldsymbol{a}\overline{{}^t\overline{A}\boldsymbol{b}} = {}^t\boldsymbol{a}\overline{A^*\boldsymbol{b}} = (\boldsymbol{a}, A^*\boldsymbol{b}).$$

定理 21 ユニタリ行列 $(A^*A = E_n)$, 特に直交行列 $({}^tAA = E_n)$ の固有値の絶対値は 1.

(証明) A がユニタリなら $A^*A = E_n$ で, 固有値 λ と固有ベクトル $\boldsymbol{a}$ をとると, $A\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a}$ より,

$$|\lambda|^2\|\boldsymbol{a}\| = (\lambda\boldsymbol{a}, \lambda\boldsymbol{a}) = (A\boldsymbol{a}, A\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a}, A^*A\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})\|\boldsymbol{a}\|^2.$$

$\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ より, $|\lambda| = 1$. ■

定理 22 エルミート行列 $(A^* = A)$ の固有値は実数. 特に実対称行列の固有値も実数.

(証明) $A\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a}$ $(\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0})$ に対し, $A^* = A$ より,

$$\lambda(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = (A\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a}, A^*\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a}, A\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a}, \lambda\boldsymbol{a}) = \overline{\lambda}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})$$

となり, $\lambda = \overline{\lambda}$ を得る. ■

4.3 正規行列 (normal matrix)

定義 4.3 正方行列 A が **正規行列 (normal matrix)** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $A^*A = AA^*$.

実対称行列, エルミート行列, 直交行列, ユニタリ行列は全て正規行列である.
また n 次正規行列 A とユニタリ行列 U に対し, U^*AU も正規行列である.
問 上の 2 つの事実を確かめよ. また後半で UAU^* についてはどうか答えよ.

補題 6 A が正規行列のとき $A\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a}$ $(\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0})$ なら $A^*\boldsymbol{a} = \overline{\lambda}\boldsymbol{a}$.

(証明) $(A\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, A^*\boldsymbol{b})$ と正規性, $A\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a}$ の順に用いれば, $((A^* - \overline{\lambda}E_n)\boldsymbol{a}, A^*\boldsymbol{a}) = (A(A^* - \overline{\lambda}E_n)\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = ((A^* - \overline{\lambda}E_n)A\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = \lambda((A^* - \overline{\lambda}E_n)\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = ((A^* - \overline{\lambda}E_n)\boldsymbol{a}, \overline{\lambda}\boldsymbol{a})$. 両辺の差をとると, $\|(A^* - \overline{\lambda}E_n)\boldsymbol{a}\|^2 = 0$, 即ち, $A^*\boldsymbol{a} = \overline{\lambda}\boldsymbol{a}$. ■

定理 23 正規行列はユニタリ行列によって対角化可能. また実対称行列は直交行列によって対角化可能.

(証明) A を n 次正規行列として, n についての帰納法で示す. A の一つの固有値を λ, その固有ベクトルを $\boldsymbol{a}; \|\boldsymbol{a}\| = 1$ とする. $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}$ として, 他に $\boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbf{C}^n$ を, $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ が $\mathbf{C}^n$ の正規直交基底 (ONB) となるようにとっておく. $W = \mathbf{L}(\boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ とすると

$$\mathbf{C}^n = \mathbf{L}(\boldsymbol{a}) \oplus W, \quad \mathbf{L}(\boldsymbol{a})^\perp = W.$$

$\mathbf{L}(\boldsymbol{a})$ は明らかに f_A 安定部分空間であるが, 実は W もそうであることを示す. $\boldsymbol{b} \in W$ に対し, $(A\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{b}, A^*\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{b}, \overline{\lambda}\boldsymbol{a}) = \lambda(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = 0$ となるので, $A\boldsymbol{b} \in \mathbf{L}(\boldsymbol{a})^\perp = W$, i.e., $A(W) \subset W$. 故に W も f_A 安定. 従って安定部分空間の定理より, f_A のこの基底に関する表現行列が直和に分解することを示している. 即ち, ${}^\exists A_1$: $(n-1)$ 次行列;

$$A(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ O & A_1 \end{pmatrix}.$$

$U = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ とおけば, $\{\boldsymbol{a}_i\}$ が ONB であるから, ユニタリ行列で (実際, U^*U の成分は ${}^t\overline{\boldsymbol{a}_i}\boldsymbol{a}_j = \overline{{}^t\boldsymbol{a}_i\overline{\boldsymbol{a}_j}} = \overline{(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j)} = \delta_{ij}$),

$$AU = U\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ O & A_1 \end{pmatrix}, \quad \text{i.e.,} \quad U^*AU = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ O & A_1 \end{pmatrix}.$$

これから, A_1 も正規行列であることが容易に分る. (実際, 最後の式の左辺がそうであるから.) 従って A_1 に対し, 帰納法の仮定を用いることができて, $^\exists T_1$: ユニタリ行列; $T_1^* A_1 T_1$ は対角行列. そこで $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ O & T_1 \end{pmatrix}$, $P = UT$ おけば, 何れもユニタリ行列で,

$$P^*AP = T^*U^*AUT = T^* \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ O & A_1 \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ O & T_1^* A_1 T \end{pmatrix}$$

となり, 対角行列となる. ■

4.4 直交行列の標準形 (norma form of orthogonal matrix)

直交行列を実数の範囲で, 対角化できるだろうか? 固有値が全て実数なら, 前の定理のように可能であるが, 一般には, 絶対値が 1 であることしか分らない. しかし, 実際には可能で, 次のようになる.

定理 24 n 次直交行列 A に対し, $^\exists Q$: n 次直交行列;

$$^tQAQ = \mathrm{diag}\ (a_1, \dots, a_r, R_{\theta_1}, \dots, R_{\theta_s})$$

と対角化できる. ここで $a_i = \pm 1$, R_{θ_j} は 2 次の角 θ_j の回転行列である.

(証明の概略) まず直交行列の固有値は, 絶対値が 1 より, それらを $a_i = \pm 1$, $\beta_j = e^{i\theta_j} = \cos\theta_j + i \sin\theta_j$ として, 適当なユニタリ行列 U で, $U^*AU = \mathrm{diag}\ (a_1, \dots, a_r, \beta_1, \overline{\beta_1}, \dots, \beta_s, \overline{\beta_s})$ とできる. (但し, $r + 2s = n$.) しかも $U = (\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_n)$ とすると, $\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_r$ は実ベクトルで, 残りは複素ベクトルで $\boldsymbol{p}_{r+2j} = -i\overline{\boldsymbol{p}_{r+2j-1}}$ $(1 \le j \le s)$ となるようにとれる. 実際, 実固有値を $a_1, \dots, a_r$ とし, また複素数 β_j が固有値なら $\overline{\beta_j}$ もそうなので, $\beta_1, \overline{\beta_1}, \dots, \beta_s, \overline{\beta_s}$ が全ての固有値であるとしてよい. さらに a_k が実数であることから, その固有空間 V_{a_k} に対し, $V'_{a_k} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n; A\boldsymbol{x} = a_k \boldsymbol{x}\}$ を考えると $V_{a_k} = V'_{a_k} + iV'_{a_k} = (1+i)V'_{a_k}$ が示せるので, V_{a_k} の $\mathbf{C}$ 上の正規直交基底として, 実ベクトル (V'_{a_k} の $\mathbf{R}$ 上の正規直交基底) がとれる. また V_{β_j} の正規直交基底 $\{\boldsymbol{p}_{j,\ell}\}$ の複素共役 $\{\overline{\boldsymbol{p}_{j,\ell}}\}$ は $V_{\overline{\beta_j}}$ の正規直交基底となるから $\{-i\overline{\boldsymbol{p}_{j,\ell}}\}$ もそうなる. そこで $T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ とおけば, $T^* \begin{pmatrix} \beta_j & 0 \\ 0 & \overline{\beta_j} \end{pmatrix} T = R_{\theta_j}$ となり, これを用いることにより, 直交行列 Q が作れる. 実際, $S = \mathrm{diag}\ (1, \dots, 1, T, \dots, T)$ (1 は r 個, T は s 個) とすると, これはユニタリ行列だが, $Q = US$ とおけば上の取り方から, 直交行列となり, 題意を満たすことが分る. ■

問 4.1 実正方行列 A のある固有値 a が実数なら, その固有空間 $V_a = \{\boldsymbol{z} \in \mathbf{C}^n; A\boldsymbol{z} = a\boldsymbol{z}\}$ に対し, $V'_a = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n; A\boldsymbol{x} = a\boldsymbol{x}\}$ とおくと, $V_a = (1+i)V'_a$ が成り立つことを示せ.

5 2 次形式 (quadratic form)

前期は実対称行列 ${}^tA = A$, エルミート行列 $A^* = A$, 直交行列 ${}^tAA = E_n$, ユニタリ行列 $A^*A = E_n$ は全て正規行列 $A^*A = AA^*$ であり, 正規行列は, ユニタリ行列で, 対角化可能で, また実対称行列も, 直交行列で, 対角化可能であるということを示した. (ちなみに直交行列は実行列でのみ定義されていることに注意.)

5.1 2 次形式の定義 (definition of quadratic form)

$\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$ についての斉次 2 次多項式 (2 次以外の項を持たない)

$$q(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^n b_i x_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} c_{ij} x_i x_j$$

を **2 次形式 (quadratic form)** という. また $a_{ii} = b_i$, $a_{ij} = a_{ji} = c_{ij}/2$ $(i < j)$ として $A = (a_{ij})$ を考えると, $A[\boldsymbol{x}] := {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ に対し,

$$q(\boldsymbol{x}) = A[\boldsymbol{x}] = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j.$$

即ち, 2 次形式と対称行列が 1 対 1 に対応する.

5.2 正定値 2 次形式 (positive definite quadratic form)

定義 5.1 実 2 次形式 $q(\boldsymbol{x})$ が **正定値 (positive definite)** $\overset{\text{def}}{\iff} {}^\forall\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n, q(\boldsymbol{x}) > 0.$
また実対称行列 A が**正定値** $\overset{\text{def}}{\iff} {}^\forall\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}, A[\boldsymbol{x}] = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} > 0.$

定理 25 実対称行列が正定値 $\iff$ その固有値が全て正.

(証明) 実対称行列 A は直交行列 U で対角化できるから ${}^tUAU = \mathrm{diag}\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) =: D$ (α_i は A の固有値で, 全て実数.) これからベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \boldsymbol{x} = U\boldsymbol{y}$ に対し,

$$A[\boldsymbol{x}] = A[U\boldsymbol{y}] = {}^t\boldsymbol{y}{}^tUAU\boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{y}D\boldsymbol{y} = \sum \alpha_i y_i^2$$

となることから明らか. 実際, まず A が正定値なら, 任意のベクトル $\boldsymbol{y}$ に対し, $\boldsymbol{x} = Uy$ とすれば, $0 < A[x] = \sum \alpha_i y_i^2$ で, $\boldsymbol{y}$ を基本ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ ととれば, 右辺は α_i で, 正となる. 即ち, 固有値は全て正. 逆に, そうなら, 任意のベクトル $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ に対し, $\boldsymbol{y} = {}^tUx$ とすれば, $\boldsymbol{y} \neq \mathbf{0}$ で, 上の式から, $A[\boldsymbol{x}] > 0$. ■

A が正定値対称行列なら, 行列式は固有値の積となるので, $\det A > 0$ が成り立つが, 逆は一般に成り立たない.

定理 26 n 次実対称行列が正定値 $\iff 1 \le {}^\forall k \le n, \det A_k > 0,$

但し, $A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$ で, A の**主対角行列**という.

(証明) $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^k; \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ に対し, $\boldsymbol{y} = {}^t(\boldsymbol{x}, \mathbf{0}) \in \mathbf{R}^n$ とすれば, $0 < A[\boldsymbol{y}] = A_k[\boldsymbol{x}]$ より, A_k も正定値. よって $\det A_k > 0$.

逆に $\det A_k > 0$ $(1 \le k \le n)$ を仮定して A が正定値であることを帰納法で示す. $n = 1$ なら明らか. $n \ge 2$ として, $A_1, \ldots, A_{n-1}$ までが正定値であるとして, $A = A_n$ もそうであることを示せば良い. 背理法で示す. もし A が正定値でなければ, 前の定理から, 固有値の中で負のものがあることになるが, 行列式は正で固有値の積なので, 少なくとも 2 つの固有値は負になる. それを $\alpha_1, \alpha_2 < 0$ として, 残りの固有値を $\alpha_3, \ldots, \alpha_n$ として, 直交行列 U によって (必要なら行の入れ替えにより) ${}^tUAU = \mathrm{diag}\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) =: D$ となるとして良い. $\boldsymbol{a}_1 = U\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{a}_2 = U\boldsymbol{e}_2$ とすると ($\boldsymbol{e}_i$ は基本ベクトル) $A[\boldsymbol{a}_i] = \alpha_i < 0$ $(i = 1, 2)$. そこで $W = \mathbf{L}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ とすると, ${}^\forall \boldsymbol{x} \in W; \neq \mathbf{0}$ に対し, $\boldsymbol{x} = x\boldsymbol{a}_1 + y\boldsymbol{a}_2$ (${}^\exists x, y; x \neq 0$ or $y \neq 0$). これより ${}^t\boldsymbol{a}_1 A\boldsymbol{a}_2 = {}^t\boldsymbol{e}_1 D\boldsymbol{e}_2 = 0$ に注意すれば,

$$A[\boldsymbol{x}] = x^2 A[\boldsymbol{a}_1] + 2xy({}^t\boldsymbol{a}_1 A\boldsymbol{a}_2) + y^2 A[\boldsymbol{a}_2] = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 y^2 < 0.$$

即ち $A[\boldsymbol{x}] < 0$ on $W \setminus \{\mathbf{0}\}$. 一方, $\boldsymbol{x} = {}^t(\widetilde{\boldsymbol{x}}, 0) \in V = \mathbf{R}^{n-1} \times \{0\}$ に対しては, $A[\boldsymbol{x}] = A_{n-1}[\widetilde{\boldsymbol{x}}]$ で, 帰納法の仮定より, これは正定値なので, $A[\boldsymbol{x}] > 0$ on $V \setminus \{\mathbf{0}\}$. しかし, $V \cap W$ は $\mathbf{0}$ 以外のベクトルを持つことが容易に分るので矛盾. (実際, V, W それぞれの次元は $n-1, 2$ で, 全体でも n 次元なので, $V + W$ は直和にはならない. 即ち, $V \cap W \neq \{\mathbf{0}\}$.) ■

ここまでで, 目標であった, **『正定値実対称行列は直交行列で対角化可能で, 対角成分は固有値で, それらは全て正である』**が証明された.

応用として, n 次元正規分布 $N(\boldsymbol{m}, V)$ について述べよう.
$\boldsymbol{m} \in \mathbf{R}^n$ は**平均ベクトル**, V は正定値実対称行列で, **共分散行列**と呼ぶ.
$A \subset \mathbf{R}^n$ に対し,

$$P(A) = \int_A \sqrt{\frac{\det Q}{(2\pi)^n}} \exp\left(-\frac{1}{2}{}^t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m})Q(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m})\right) d\boldsymbol{x}.$$

但し, $Q = V^{-1}$ で, 特に 1 次元 $(n = 1)$ なら

$$P(A) = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left(-\frac{-(x - m)^2}{2v}\right) dx.$$

但し $m \in \mathbf{R}$: 平均 (**mean**), $v > 0$: 分散 (**variance**) という.
これについて $P(\mathbf{R}^n) = 1$ を示そう. そのためにまず, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ という事実を用いると

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/(2v)} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-m)^2/(2v)} dx = 1$$

を得て, $n = 1$ で成り立つことが分る. 一般のときは, まず V の固有値を $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ とすると, 全て正で, ${}^\exists U$: 直交行列; ${}^tUVU = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) =: D$, $\det V = \lambda_1 \cdots \lambda_n$ より, ${}^tUQU = \mathrm{diag}\,(\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1})$, $\det Q = 1/(\lambda_1 \cdots \lambda_n)$. 従って $\boldsymbol{y} = U(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m})$ と変数変換することにより, ${}^t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m})Q(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m}) = {}^t\boldsymbol{y}D\boldsymbol{y} = \sum y_i^2/\lambda_i$ で, $\det U = \pm 1$ から, $d\boldsymbol{y} = |\det U| d\boldsymbol{x} = d\boldsymbol{x}$ となるので,

$$P(\mathbf{R}^n) = \int_{\mathbf{R}^n} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \lambda_1 \cdots \lambda_n}} \exp\left(-\sum \frac{y_i^2}{2\lambda_i}\right) d\boldsymbol{y} = \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_i}} \exp\left(-\frac{y_i^2}{2\lambda_i}\right) dy_i = 1.$$

5.3 2 次形式の同値性 (equivalence of quadratic forms)

定義 5.2 2 つの複素 (実, 有理) 2 次形式 $q_1(\boldsymbol{x}) = A[\boldsymbol{x}], q_2(\boldsymbol{x}) = B[\boldsymbol{x}]$ が**同値 (equivarent)** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^\exists Q$: 複素 (実, 有理) 正則行列; $A = {}^tQBQ$.

ちなみに $Q(i,j)$ を単位行列の第 i 行と第 j 行を入れ換えたものとすると正則で, $Q(i,j)\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の x_i と x_j を入れ換えたものになるので, 2 次形式の変数の入れ換えをしたものは同値である.

補題 7 2 つの複素 2 次形式 $q_1(\boldsymbol{x}) = A[\boldsymbol{x}], q_2(\boldsymbol{x}) = B[\boldsymbol{x}]$ が同値なら $\mathrm{rank}\ A = \mathrm{rank}\ B$.

(証明) 正則行列 Q によって $A = {}^tQBQ$ となるなら $\mathrm{rank}\ A = \mathrm{rank}\ {}^tQBQ = \mathrm{rank}\ B$. ■

例 4 実 2 次形式 $q_1(x,y) = xy$ と $q_2(x,y) = x^2 - y^2$ は同値.

$$A_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

に対し, ${}^tQA_1Q = A_2$.

定理 27 任意の 2 次形式 $q(\boldsymbol{x}) = A[\boldsymbol{x}]$ は $\alpha_1 x_1^2 + \cdots + \alpha_n x_n^2$ の形の 2 次形式と同値. これを $q(\boldsymbol{x})$ の**標準形**という. 特に, 実 2 次形式 $q(\boldsymbol{x}) = A[\boldsymbol{x}]$ は A が実対称行列なので, 適当な直交行列 U により, ${}^tUAU = \mathrm{diag}\ (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ と対角化できるので, $\alpha_1 x_1^2 + \cdots + \alpha_n x_n^2$ と同値となる.

(証明) K を $\mathbf{C}, \mathbf{R}, \mathbf{Q}$ のいずれかとして, n 次対称行列 $A = (a_{ij})$ $(a_{ij} \in K)$ に対し, ${}^\exists P$: K 成分の正則行列; ${}^tPAP$ が対角行列となることを示せば良い.

E_{ij} を (i,j) 成分が 1 で他は全て 0 である行列として, $c \in K$ に対し, $P(i,j;c) = E_n + cE_{ij}$ とする. また対称行列 A に対し, ${}^tP(i,j;c)AP(i,j;c)$ は A の第 i 行を c 倍して, 第 j 行に加え, さらに第 i 列を c 倍して, 第 j 列に加える操作をしたものとなる. A が対称なのでこれも対称となる. 簡単のため, この操作を $\Pi(i,j;c)$ と表す.

n についての帰納法で A が上の操作の繰り返しで対角化できることを示す. $n \geq 2$ で, A の第一行は $\mathbf{0}$ でないとして良い. このとき必要なら変換 $\Pi(i,j;c)$ を用いることにより, $a_{11} \neq 0$ として良い. 実際, もし $a_{11} = 0$ なら, 第一行は $\mathbf{0}$ でないことから ${}^\exists i > 1; a_{1i} \neq 0$, さらに対称性から $a_{i1} \neq 0$ に注意して, $\Pi(i,1;1)$ を施すと $(1,1)$ 成分は $2a_{1i} + a_{ii}$ となる. ここで, もし $a_{ii} = 0$ なら $(1,1)$ 成分は $2a_{1i} \neq 0$ で成り立つ. また $a_{ii} \neq 0$ なら x_1 と x_i を入れ換えることにより, やはり $a_{11} \neq 0$ となる. そこで初めから $a_{11} \neq 0$ とする. 操作 $\Pi(1,2;-a_{12}/a_{11})$ により, $(1,2),(2,1)$ 成分が共に 0 となり, 操作 $\Pi(1,3;-a_{13}/a_{11})$ により, $(1,3),(3,1)$ 成分が共に 0 となるのでこれを続けることにより, A は次の対称行列に変換される.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ O & A_1 \end{pmatrix}.$$

A_1 は $(n-1)$ 次の対称行列なので, 帰納法の仮定から, 対角化でき, これにより証明が終わる. ■

系 3 K を $\mathbf{C}, \mathbf{R}, \mathbf{Q}$ のいずれかとする. K 成分の対称行列は, K 成分の正則行列で対角化できる.

複素 2 次形式の場合

定理 28 任意の複素 2 次形式 $q(\boldsymbol{x}) = A[\boldsymbol{x}]$ は $r = \mathrm{rank}\ A$ として, $x_1^2 + \cdots + x_r^2$ と同値.

(証明) 上の定理により, 初めから $q(\boldsymbol{x}) = \alpha_1 x_1^2 + \cdots + \alpha_n x_n^2$ として良い. また必要なら変数の入れ換えにより, ${}^{\exists}s \le n; \alpha_1 \ne 0, \ldots, \alpha_s \ne 0$ で残りは全て 0 として良い. 即ち,

$$A = \mathrm{diag}\ (\alpha_1, \ldots, \alpha_s, 0, \ldots, 0)$$

として良い. そこで $\beta_i = (\alpha_i)^{-1/2}$ $(1 \le i \le s)$ として, $P = \mathrm{diag}\ (\beta_1, \ldots, \beta_s, 1, \ldots, 1)$ とおけば,

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} E_s & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

これより $s = \mathrm{rank}\ ({}^tPAP) = \mathrm{rank}\ A = r$. ■

実 2 次形式の場合

定理 29 任意の実 2 次形式 $q(\boldsymbol{x}) = A[\boldsymbol{x}]$ は $x_1^2 + \cdots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \cdots - x_{r+s}^2$ と同値.

(証明) 上の証明と同様に, 初めから $A = \mathrm{diag}\ (\alpha_1, \ldots, \alpha_{r+s}, 0, \ldots, 0)$ として良い. ここで α_i は実数なので, 初めの r 個は正, 次の s 個は負として良い.
$P = \mathrm{diag}\ (1/\sqrt{\alpha_1}, \ldots, 1/\sqrt{\alpha_r}, 1/\sqrt{-\alpha_{r+1}}, \ldots, 1/\sqrt{-\alpha_{r+s}}, 1, \ldots, 1)$ とおけば,

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} E_r & & \\ & -E_s & \\ & & O \end{pmatrix}.$$

■

上の定理の (r, s) をこの 2 次形式の**符号数**という. 符号数が同じなら同値な 2 次形式となるが, その逆は言えるのだろうか？それに答えるのが次の定理である.

定理 30 (シルベスターの定理 (Sylvester's theorem)) 2 つの標準形 2 次形式 $x_1^2 + \cdots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \cdots - x_{r+s}^2$ と $x_1^2 + \cdots + x_{r'}^2 - x_{r'+1}^2 - \cdots - x_{r'+s'}^2$ が同値なら $r = r', s = s'$

(証明) まず $q_1(\boldsymbol{x}), q_2(\boldsymbol{x})$ に対応する対称行列をそれぞれ A_1, A_2 とする. そのランクが等しいことから $r + s = r' + s'$ で,

$$A_1 = \begin{pmatrix} E_r & & \\ & -E_s & \\ & & O \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} E_{r'} & & \\ & -E_{s'} & \\ & & O \end{pmatrix}.$$

ある正則行列 P があって, $A_1 = {}^tPA_2P$. $r < r'$ と仮定して, 矛盾を言おう. ここで $n = r+s = r'+s'$ として示せば十分. 未知変数 $y_1, \ldots, y_{r'}, x_{r+1}, \ldots, x_n$ について, ${}^t\boldsymbol{y} = {}^t(y_1, \ldots, y_{r'}, 0, \ldots, 0), {}^t\boldsymbol{x} = {}^t(0, \ldots, 0, x_{r+1}, \ldots, x_n)$ として, 方程式 $\mathsf{y} = P\boldsymbol{x}$ を考える. $r' + (n - r) = n + (r' - r) > n$ より, これは自明でない解で, $\boldsymbol{y} \ne \boldsymbol{0}$ or $\boldsymbol{x} \ne \boldsymbol{0}$ なるものをもつ. このとき

$$-x_{r+1}^2 - \cdots - x_{r+s}^2 = {}^t\boldsymbol{x}A_1\boldsymbol{x} = {}^t\boldsymbol{x}{}^tPA_2P\boldsymbol{x} = {}^t\boldsymbol{y}A_2\boldsymbol{y} = y_1^2 + \cdots + y_{r'}^2$$

となるが, (左辺)≤ 0, (右辺)≥ 0 より, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ でなければならないが, これは矛盾する. よって $r \ge r'$ でなければならないが, $r > r'$ と仮定しても同様に矛盾するので, 結局, $r=r'$. $r+s=r'+s'$ より, $s=s'$ も成り立つ. ■

有理 2 次形式の場合　この場合, 有理数の平方根が必ずしも有理数とならないことから, 同値でない 2 次形式は沢山ある.

例 5　有理 2 次形式 $q_1(x,y)=x^2+y^2$ と $q_2(x,y)=2x^2+y^2$ は同値でない.

$$A_1=E_2, \quad A_2=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

これらが同値なら, $A_2={}^tPA_1P={}^tPP$ より, $\det A_2=(\det P)^2$. よって $|\det P|=\sqrt{2}$ となるが, これは P の成分が有理数で, その行列式もそうであることに反する.

例 6　1 変数の有理 2 次形式 $q_1(x)=ax^2$ と $q_2(x)=bx^2$ $(a\neq 0, b\neq 0)$ が同値 $\iff$ b/a が $\mathbf{Q}$ の中で平方数, i.e., ${}^{\exists}p\in\mathbf{Q}; b/a=p^2$.　　　　$({}^{\exists}p\in\mathbf{Q},\neq 0; b=pap=ap^2$ より, $b/a=p^2$.)

5.4 平面 2 次曲線，空間 2 次曲面 (quadratic curve, quadratic surface)

実 2 次形式の応用として, 2 次曲線・曲面について調べることができる.

「平面 2 次曲線は, 退化した場合を除けば, 楕円, 双曲線, 放物線のいずれかになる.」

「空間 2 次曲面 は, 退化した場合を除けば, 楕円面, 1 葉双曲面, 2 葉双曲面, 楕円的放物面, 双曲的放物面, 楕円錐面, 楕円柱面, 双曲柱面, 放物柱面のいずれかになる.」

6 最小多項式 (minimal polynomial)

6.1 最小多項式の定義 (definition of minimal polynomial)

n 次行列 A に対し, 多項式の集合 $I(A)$ (イデアル) を次で定義する.

$$I(A)=\{p(x);\ \text{複素多項式で},\ p(A)=O\}.$$

明らかに $0\in I(A)$. また固有多項式 $\chi_A(x)\in I(A)$.

補題 8　(1) $f(x),g(x)\in I(A)\Longrightarrow f(x)+g(x)\in I(A)$.
(2) $f(x)\in I(A)\Longrightarrow {}^{\forall}h(x)$: 多項式, $h(x)f(x)\in I(A)$.

(証明)　$I(A)$ の定義より明らか. $(f\in I(A) \iff f(A)=O.)$ ■

最高次係数が 1 の多項式を**モニック多項式**という. 0 はモニックではなく, モニックは 0 ではない. 固有多項式はモニック.

定義 6.1　n 次行列 A に対し, $I(A)$ のモニック多項式のうち, 最小次数のものを A の**最小多項式 (minimal polynomial)** といい, $\mu_A(x)$ と表す.

この $\mu_A(x)$ は固有多項式がモニックであることから存在し, しかも, 唯一つ決まる. 実際, $f, g \in I(A)$ を最小次数 m のモニック多項式とすると, $r = f - g \in I(A)$ で, r の次数 $< m$. もし $r \neq 0$ として, この最高次の係数を $c \neq 0$ とすると, $r/c \in I(A)$ はモニックで, 次数 $< m$ より, m の最小性に反する. ゆえに $r = 0$ となり, $f = g$ で一意となる.

補題 9 n 次行列 A に対し, $I(A) =$[A の最小多項式 $\mu_A(x)$ によって割り切れる多項式全体]. 特に固有多項式 $\chi_A(x)$ は $\mu_A(x)$ で割り切れる. 従って $\mu_A(x)$ の次数は n 以下.

(証明) $f \in I(A)$ を μ_A で割ると, $f(x) = \mu_A(x)q(x) + r(x)$ (r の次数 $<$ μ_A の次数). $r = f - \mu_A q \in I(A)$ より, 上の一意性の証明と同様にして, $r = 0$ となる. ■

例 7

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad \text{の最小多項式は } \mu_A(x) = (x-a)^2 \text{ となる.}$$

実際, 固有多項式は $\chi_A(x) = (x-a)^3$ で, 最小多項式はその約数なので, $1, x-a, (x-a)^2, (x-a)^3$ のいずれかになるが, 計算すれば, $A - aE_2 \neq O, (A - aE_2)^2 = O$.

定理 31 λ が n 次行列 A の固有値なら $\mu_A(x)$ は $x - \lambda$ で割り切れる. 特に $\mu_A(x) = 0$ の解全体は A の固有値全体と一致する.

(証明) $\mu_A(x)$ を $x - \lambda$ で割った余りを考えれば, 容易に分る. 実際, $\mu_A(x) = q(x)(x - \lambda) + c$ として, もし $c \neq 0$ なら, $O = \mu_A(A) = q(A)(A - \lambda E_n) + cE_n$ より, $(q(A)/c)(\lambda E_n - A) = E_n$ となり, $\lambda E_n - A$ が正則になり, 矛盾. ■

例 8 次の最小多項式は $a \neq b$ なら $\mu_A(x) = (x-a)^2(x-b) = \chi_A(x)$, $a = b$ なら $\mu_A(x) = (x-a)^2$.

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

例 9 $A = \mathrm{diag}\ (a_1, \ldots, a_n)$ の最小多項式は $a_1, \ldots, a_n$ の中で異なるものを $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ とすれば, $\mu_A(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_r)$ となる.

6.2 対角化可能性の判定条件

定理 32 n 次行列 A, B に対し, $A \approx B$ なら $\mu_A(x) = \mu_B(x)$.

(証明) $B = P^{-1}AP$ より, $\mu_A(B) = \mu_A(P^{-1}AP) = P^{-1}\mu_A(A)P = O$. $\mu_A \in I(B)$ となり, これは μ_B の倍数となる. 逆も言えるので等号が成り立つ. ■

定理 33 n 次行列 A が対角化可能 $\iff$ $\mu_A(x) = 0$ が重解を持たない.

(証明) まず A が対角化可能なら, 対角行列 B と相似で, $\mu_A=\mu_B$. 所が前の例から, μ_B は異なる固有値による 1 次式の積となるので, 重解を持たないことは明らか.

逆に $\mu_A(x)=0$ が重解を持たないとする. 即ち, $\mu_A(x)=(x-\alpha_1)\cdot(x-\alpha_r)$ で α_i は全て異なる. ここで

$$\phi_i(x)=\prod_{k\neq i}(x-\alpha_k)/\prod_{k=1}^{r}(\alpha_i-\alpha_k)$$

とおくと, $(r-1)$ 次の多項式で, $\phi_i(\alpha_i)=1,\phi_i(\alpha_k)=0\ (k\neq i)$ を満たす. そこで $(r-1)$ 次方程式 $\sum_{i=1}^r\phi_i(x)=1$ を考えると, r 個の解 $x=\alpha_i$ を持つので, これは恒等的に成り立つ. 従って $\sum_{i=1}^r\phi_i(A)=E_n$. また $(x-\alpha_i)\phi_i(x)$ は $\mu_A(x)$ の倍数なので, $(A-\alpha_i)\phi_i(A)=O$, 特に $A\phi_i(A)=\alpha_i\phi_i(A)$. これより ${}^\forall\boldsymbol{x}\in\mathbf{C}^n$, $A\phi_i(A)\boldsymbol{x}=\alpha_i\phi_i(A)\boldsymbol{x}$. よって $\phi_i(A)\boldsymbol{x}\in V_{\alpha_i}$. また $\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^r\phi_i(A)\boldsymbol{x}$ より, $\mathbf{C}^n=V_{\alpha_1}+\cdots+V_{\alpha_r}$ で, α_i が相異なる固有値であるから, この和は直和となり, 定理より A は対角化可能となる. ■

6.3 2次行列の標準形, 3 次行列の標準形 (normal forms of 2-dimensional matrix and 3dimensional matrix)

定理 34 2 次行列 A とその最小多項式 $\mu_A(x)$ に対し次が成り立つ.

(1) $\mu_A(x)$ が 1 次式で, $\mu_A(x)=0$ の解が α なら, $A\approx\alpha E_2$.

(2) $\mu_A(x)$ が 2 次式で, $\mu_A(x)=0$ の解が $\alpha\neq\beta$ なら, $A\approx\mathrm{diag}\ (\alpha,\beta)$.

(3) $\mu_A(x)$ が 2 次式で, $\mu_A(x)=0$ が重解 α を持つなら, $A\approx\begin{pmatrix}\alpha&1\\0&\alpha\end{pmatrix}$.

(証明) A の最小多項式 $\mu_A(x)$ は高々 2 次のモニック多項式なので, $x-\alpha$, $(x-\alpha)(x-\beta)$ $(\alpha\neq\beta)$, $(x-\alpha)^2$ の可能性がある. 初めの 2 つは $\mu_A(x)=0$ が重解を持たないので, A は対角化可能で, それぞれ $\alpha E_2,\mathrm{diag}\ (\alpha,\beta)$ と相似となる. $\mu_A(x)=(x-\alpha)^2$ のとき, $N=A-\alpha E_2$ とおくと, 最小多項式の定義から $N\neq O,N^2=O$ を満たす. また A が対角化できないことから N もそうである. $\mu_N(x)=x^2$ で, 固有値は 0 のみ. 固有空間 V_0 は 1 次元となる. (1 次元以上は定義から明らかで, もし 2 次元なら, $V_0=\mathbf{C}^2$ で, N が対角化されることになり矛盾.) 一方, $N\neq O$ より, ${}^\exists\boldsymbol{x}\in\mathbf{C}^2;N\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$. $\boldsymbol{x}\notin V_0$ で, $N(N\boldsymbol{x})=N^2\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ なので, $N\boldsymbol{x}\in V_0$. 従って $\boldsymbol{x},N\boldsymbol{x}$ は $\mathbf{C}^2$ の基底となる. この基底による N の表現行列を考えると

$$N(N\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=(N^2\boldsymbol{x},N\boldsymbol{x})=(\mathbf{0},N\boldsymbol{x})=(N\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})(\mathbf{0},\boldsymbol{e}_1)=(N\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}.$$

従って $P=(N\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$ とおくと, $P^{-1}NP=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$. $A=\alpha E_2+N$ より, $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\alpha&1\\0&\alpha\end{pmatrix}$.
■

問 $\begin{pmatrix}\alpha&1\\0&\alpha\end{pmatrix}$. が対角化できないことを直接, 確かめよ. ($\alpha=0$ で示せば十分.)

定理 35 3 次行列 A とその最小多項式 $\mu_A(x)$ に対し, 次が成り立つ.

(1) $\mu_A(x)=x-\alpha$ のとき. $A\approx\alpha E_3$.

(2) (a) $\mu_A(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$ $(\alpha\neq\beta)$ なら, $A\approx\mathrm{diag}\ (\alpha,\alpha,\beta)$ or $\mathrm{diag}\ (\alpha,\beta,\beta)$.

(b) $\mu_A(x)=(x-\alpha)^2$ なら, $A\approx\begin{pmatrix}\alpha & 1 & \\ & \alpha & \\ & & \alpha\end{pmatrix}$.

(3) (a) $\mu_A(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ (異なる 3 解をもつ) なら, $A\approx\mathrm{diag}\,(\alpha,\beta,\gamma)$.

(b) $\mu_A(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)(x-\gamma)$ $(\alpha\neq\beta)$ なら, $A\approx\begin{pmatrix}\alpha & 1 & \\ & \alpha & \\ & & \beta\end{pmatrix}$.

(c) $\mu_A(x)=(x-\alpha)^3$ なら, $A\approx\begin{pmatrix}\alpha & 1 & \\ & \alpha & 1\\ & & \alpha\end{pmatrix}$.

7 ジョルダン標準形 (Jordan normal form)

7.1 ジョルダンの定理 (Jordan's theorem)

定義 7.1 $r\in\mathbf{N},\alpha\in\mathbf{C}$ に対し,

$$J_r(\alpha)=\begin{pmatrix}\alpha & 1 & & & \\ & \alpha & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \alpha & 1\\ & & & & \alpha\end{pmatrix}$$

を α に対する r 次の **ジョルダン・セル (Jordan cell)** と呼ぶ. (ちなみに $J_1(\alpha)=\alpha$ である.) さらに $n,r_1,\ldots,r_m\in\mathbf{N};r_1+\cdots+r_m=n$ と $\alpha_1,\ldots,\alpha_m\in\mathbf{C}$ に対し,

$$\begin{pmatrix}J_{r_1}(\alpha_1) & & & \\ & J_{r_2}(\alpha_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{r_m}(\alpha_m)\end{pmatrix}$$

を **(ジョルダン) 標準形行列 (Jordan normal matrix)** という.

定理 36 (ジョルダンの定理 (Jordan's theorem)) 任意の正方行列はあるジョルダン標準形行列と相似である.

例えば, 前節で述べたように, 2 次行列は次の何れかと同値 ($\alpha\neq\beta$ とする)

$$\alpha E_2,\quad\begin{pmatrix}\alpha & \\ & \beta\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}\alpha & 1\\ & \alpha\end{pmatrix}.$$

3 次行列は次の何れかと同値 (α,β,γ は全て異なるとする) αE_3, $\begin{pmatrix}\alpha E_2 & \\ & \beta\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\alpha & \\ & \beta E_2\end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix}\alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\alpha & 1 & \\ & \alpha & \\ & & \alpha\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\alpha & 1 & \\ & \alpha & \\ & & \beta\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\alpha & 1 & \\ & \alpha & 1\\ & & \alpha\end{pmatrix}$.

証明は以降の節で与える.

7.2 直既約分解, 一般固有空間, フィッティングの補題 (Fitting's lemma, general eigen space, direct irreducible decomposition)

以下, この節では V はベクトル空間, f は V 上の線形変換とする, i.e., $f: V \to V$ で線形. このとき V は f 安定空間である.

定義 7.2 V が f 安定空間として **直既約 (direct irreducible)**
$\overset{\text{def}}{\iff}$ $V = W_1 \oplus W_2$ で, W_1, W_2 が f 安定部分空間なら $W_1 = \{0\}$ or $W_2 = \{0\}$

逆に V が直既約でないなら (非自明な) f 安定部分空間の直和で表せる. このことから次が容易に分る.

定理 37 任意の f 安定空間は直既約な f 安定部分空間の直和に分解される.

ジョルダンの定理の証明　その 1 n 次行列 A に対し, $\mathbf{C}^n$ 上の線形変換 f_A を考え, 上の定理から f_A 安定な直既約な空間の直和に分解する. $\mathbf{C}^n = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$. V_i の基底を $\boldsymbol{a}_{i1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{ir_i}$ として, 行列 $P_i = (\boldsymbol{a}_{i1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{ir_i})$ を考え, V_i が f_A 安定なので, この上で, この基底に関する表現行列を A_i とすると $(f_A)|_{V_i} P_i = P_i A_i$ となる. 但し, A_i は r_i 次正則行列である. 従って $P = (P_1, \ldots, P_s)$ とおけば, n 次正則行列で, $AP = P\mathrm{diag}\,(A_1, \ldots, A_s)$ となり, A は $\mathrm{diag}\,(A_1, \ldots, A_s)$ と相似となる. このことからジョルダンの定理を示すには, 初めから, $V = \mathbf{C}^n$ が f_A 安定な直既約空間として, このとき A がジョルダン・セルと相似であることを示せば良い.

n 次正方行列 A の固有値 λ に属する固有空間 $V_\lambda = \mathrm{Ker}\,(f_A - \lambda \cdot id) = \{x \in \mathbf{C}; (A - \lambda E_n)x = 0\}$ を一般化する.

定義 7.3 n 次正方行列 A の固有値 λ に対して

$$W_\lambda = \mathrm{Ker}\,(A - \lambda E_n)^n = \{x \in \mathbf{C}; (f_A - \lambda \cdot id)^n x = 0\}$$

を固有値 λ に属する**一般固有空間 (general eigen space)** という.

明らかに固有空間は一般固有空間の部分空間である. $V_\lambda \subset W_\lambda$.

補題 10 行列 A の固有値 λ に属する一般固有空間 W_λ は f_A 安定な部分空間である.

(証明) $(A - \lambda E_n)A = A(A - \lambda E_n)$ より, $(A - \lambda E_n)^n A = A(A - \lambda E_n)^n$. $x \in W_\lambda$ なら $0 = A(A - \lambda E_n)^n x = (A - \lambda E_n)^n Ax$ となり, $f_A(x) = Ax \in W_\lambda$, i.e., $f_A(W_\lambda) \subset W_\lambda$. ■

定義 7.4 $f^m = f \circ \cdots \circ f$ (m 個の合成).
f が**べき零線形変換 (nilpotent linear tranform)** $\overset{\text{def}}{\iff}$ ${}^\exists m \in \mathbf{N}; f^m = 0$.
また n 次正方行列 A が**べき零行列 (nilpotent matrix)** $\overset{\text{def}}{\iff}$ f_A がべき零線形変換.

例題 2 n 次正方行列 A がべき零行列 $\iff$ $A^n = 0$ を示せ. 特に f が V 上でべき零で, $\dim V = n$ なら $f^n = 0$.

解 $A^m = O$ のとき, A の最小多項式 $\mu_A(x)$ は x^m の約数で, しかもその次数は n 以下なので, x^n は $\mu_A(x)$ の倍数となり, $A^n = O$ を得る. ■

補題 11 (フィッティングの補題) f が有限次元ベクトル空間 V 上の線形変換なら $^\exists V_0, V_1 \subset V$; f 安定部分空間, $V = V_0 \oplus V_1$, $f|_{V_0}$ はべき零線形変換で, $f|_{V_1}$ は同型写像.

(証明) V の部分空間列

$$V \supset \mathrm{Im}\ f \supset \mathrm{Im}\ f^2 \supset \cdots \supset \mathrm{Im}\ f^i \supset \mathrm{Im}\ f^{i+1} \supset \cdots,$$

$$\{\mathbf{0}\} \subset \mathrm{Ker}\ f \subset \mathrm{Ker}\ f^2 \subset \cdots \subset \mathrm{Ker}\ f^i \subset \mathrm{Ker}\ f^{i+1} \subset \cdots \subset V$$

を考える. V が有限次元なので $^\exists m \geq 1; \mathrm{Im}\ f^m = \mathrm{Im}\ f^{m+1} = \cdots, \mathrm{Ker}\ f^m = \mathrm{Ker}\ f^{m+1} = \cdots$ とできる. そこで $V_0 = \mathrm{Ker}\ f^m, V_1 = \mathrm{Im}\ f^m$ とおけば, これが求めるものとなる. 実際, それぞれが f 安定なることは次から明らか. $\boldsymbol{x} \in V_0$ なら $f^m(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ より, $f^m(f(\boldsymbol{x})) = f^{m+1}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ で, $f(\boldsymbol{x}) \in V_0$. $\boldsymbol{x} \in V_1$ なら $^\exists \boldsymbol{y} \in V; \boldsymbol{x} = f^m(\boldsymbol{y})$ より, $f(\boldsymbol{x}) = f^{m+1}(\boldsymbol{y}) = f^m(f(\boldsymbol{y}))$ で, $f(\boldsymbol{x}) \in V_1$ となる. また $\boldsymbol{x} \in V_0$ なら $(f|_{V_0})^m(\boldsymbol{x}) = f^m(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ から, $f|_{V_0}$ はべき零. さらに $^\forall \boldsymbol{x} \in V$ に対し, $f^m(\boldsymbol{x}) \in \mathrm{Im}\ f^m = \mathrm{Im}\ f^{2m}$ より, $^\exists \boldsymbol{y} \in V; f^m(\boldsymbol{x}) = f^{2m}(\boldsymbol{y})$ で, $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x} - f^m(\boldsymbol{y})) + f^m(\boldsymbol{y})$ と表せば, $f^m(\boldsymbol{x} - f^m(\boldsymbol{y})) = f^m(\boldsymbol{x}) - f^{2m}(\boldsymbol{y}) = \mathbf{0}$ から $\boldsymbol{x} - f^m(\boldsymbol{y}) \in V_0$, また明らかに $f^m(\boldsymbol{y}) \in V_1$. つまり $V = V_0 + V_1$. これが直和であることを示す. $\boldsymbol{x} \in V_0 \cap V_1$ をとると $\boldsymbol{x} \in V_1$ から $^\exists \boldsymbol{y} \in V; \boldsymbol{x} = f^m(\boldsymbol{y})$ でさらにこれが V_1 の元なので, $f^{2m}(\boldsymbol{y}) = f^m(f^m(\boldsymbol{y})) = \mathbf{0}$, 即ち, $\boldsymbol{y} \in \mathrm{Ker}\ f^{2m}$. しかし $\mathrm{Ker}\ f^{2m} = \mathrm{Ker}\ f^m$ なので, 結局, $\boldsymbol{x} = f^m(\boldsymbol{y}) = \mathbf{0}$ となり, $V_0 \cap V_1 = \{\mathbf{0}\}$, i.e., $V = V_0 \oplus V_1$ を得る. 最後に $f|_{V_1} : V_1 \to V_1$ については, $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}\ f|_{V_1} \iff \boldsymbol{x} \in V_1; f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ なので, $\boldsymbol{x} \in V_1 \cap \mathrm{Ker}\ f \subset V_1 \cap V_0 = \{\mathbf{0}\}$ から $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. ゆえに $\mathrm{Ker}\ f|_{V_1} = \{\mathbf{0}\}$ となり, f は V_1 上で正則, 即ち, 同型写像となる. ■

注意 $W \subset V$ 部分空間なら, $^\forall \alpha \in \mathbf{C}$ に対し, W が f 安定 $\iff$ W が $(f - \alpha \cdot id_V)$ 安定.

定理 38 V が f 安定で, 直既約なら, f はべき零, または同型のどちらかである.

フィッティングの補題と直既約の定義から明らかである.

系 4 V が f 安定で, 直既約なら, f のある固有値 α があって, V 自身が α に属する一般固有空間に一致する, i.e., $V = W_\alpha$, つまり $(f - \alpha \cdot id_V)^n = 0$ $(n = \dim V)$.

(証明) α を f の固有値とすると V は $(f - \alpha \cdot id_V)$ 安定で, しかも直既約である. (V が f 安定 $\iff$ $(f - \alpha \cdot id_V)$ 安定より言える.) 固有値の定義より, $\mathrm{Ker}\ (f - \alpha \cdot id_V) \neq \{\mathbf{0}\}$ なので, $f - \alpha \cdot id_V$ は V 上の同型ではあり得ない. 従って上の定理から, これはべき零で, $n = \dim V$ に対し, $(f - \alpha \cdot id_V)^n = 0$. ■

まず次の定理を認めて, ジョルダンの定理を証明する.

定理 39 V 上の線形変換 f がべき零で, V が f 安定で, 直既約ならば, あるベクトル $\boldsymbol{a} \in V$ と自然数 m が存在して, $\boldsymbol{a}, f(\boldsymbol{a}), f^2(\boldsymbol{a}), \ldots, f^m(\boldsymbol{a})$ が V を生成する. (これを唯一つのベクトルからなる V の f 生成系が存在するという. 正確な定義は後で述べる.)

ジョルダンの定理の証明 その 2 $V = \mathbf{C}^n$ が f_A 安定な直既約空間のとき A がジョルダン・セルと相似であることを示せば良いということまでは言った. さらに系より, ある固有値 α があり, $V = W_\alpha$. 従って $g = f_A - \alpha \cdot id_V$ は V 上のべき零変換で, V は g 安定で, 直既約となる. 従って, この g の表現行列が $J_n(0)$ となることがいえれば, f_A の表現行列が $J_n(0) + \alpha E_n = J_n(\alpha)$ とな

り, 証明が終わる. そこで以下では, V が f 安定で, 直既約, f がべき零線形変換のとき, f の表現行列が $J_n(0)$ となることを示す.

前定理から, たった一つのベクトル $\boldsymbol{a}$ からなる V の f 生成系がある. このとき $^\exists m; f^m(\boldsymbol{a}) \neq \boldsymbol{0}, f^{m+1}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ で, V は $\boldsymbol{a}, f(\boldsymbol{a}), \ldots, f^m(\boldsymbol{a})$ で生成される. この $\boldsymbol{a}, f(\boldsymbol{a}), \ldots, f^m(\boldsymbol{a})$ は一次独立である. 実際, $c_0\boldsymbol{a} + c_1 f(\boldsymbol{a}) + c_2 f^2(\boldsymbol{a}) + \cdots + c_m f^m(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ ($c_i \in \mathbf{C}$) とすると, $i > m$ なら $f^i(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ に注意して, 両辺を f^m で移すと, $c_0 f^m(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ となり, $c_0 = 0$ を得る. 次に f^{m-1} で移すと, $c_1 f^m(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ で, $c_1 = 0$. 以下同様にして, 結局, $c_0 = c_1 = \cdots = c_m = 0$ を得て, 一次独立が分る. これらから $\boldsymbol{a}, f(\boldsymbol{a}), \ldots, f^m(\boldsymbol{a})$ は V の基底となり, $n = m+1$ もいえる. この基底による f の表現行列を求めると

$$f(f^m(\boldsymbol{a}), f^{m-1}(\boldsymbol{a}), \ldots, f(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{a}) = (f^m(\boldsymbol{a}), f^{m-1}(\boldsymbol{a}), \ldots, f(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{a}) \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

となり, 証明が終わる. ■

7.3 中山の補題，べき零変換 (Nakayama's lemma, nilpotent tranform)

定理 39 の証明のために, 中山の補題を用いる.

定義 7.5 $S = \{\boldsymbol{x}_1, \ldots, x_s\} \subset V$ に対し, ある番号 N があり, $S' = \{f^i(\boldsymbol{x}_j); 0 \le i \le N, 1 \le j \le s\}$ が V を生成するとき, S を V の f **安定空間としての生成系** (あるいは単に f **生成系**) という.

定義 7.6 $S = \{\boldsymbol{x}_1, \ldots, x_s\} \subset V$ が V の f 生成系であって, S からどのベクトルを除いても f 生成系とならないとき, S を V の f **安定空間としての極小生成系** (あるいは単に **極小** f **生成系**) という.

V の基底は明らかに f 生成系であるが, 多過ぎる可能性はある.

例 10 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ に対し, $f = f_A, g = g_B, V = \mathbf{C}^2$ を考えると, 基本ベクトル $\boldsymbol{e}_2$ が f 生成系となる. 実際, $f(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_2$ が $\mathbf{C}^2$ を生成する. また $\boldsymbol{e}_1$ は g 生成系で, 何れも極小である.

定理 40 (中山の補題) f が V 上のべき零線形変換であるとき, $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r \in V$ が V の f 生成系 $\iff$ $V = \mathbf{L}(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r) + \mathrm{Im}\,(f)$.

(証明) $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r \in V$ が V の f 生成系なら,

$$^\exists N; V = \mathbf{L}(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r, f(\boldsymbol{a}_1), \ldots, f(\boldsymbol{a}_r), \ldots, f^N(\boldsymbol{a}_1), \ldots, f^N(\boldsymbol{a}_r))$$

となり, $\mathbf{L}(f(\boldsymbol{a}_1), \ldots, f(\boldsymbol{a}_r), \ldots, f^N(\boldsymbol{a}_1), \ldots, f^N(\boldsymbol{a}_r)) \subset \mathrm{Im}\,(f)$ より, $V = \mathbf{L}(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r) + \mathrm{Im}\,(f)$ が成り立つ. 逆に, これが成り立つとき, $^\forall \boldsymbol{x} \in V, ^\exists c_{0i} \in \mathbf{C}, \boldsymbol{x}_i \in V; \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^r c_{0i}\boldsymbol{a}_i + f(\boldsymbol{x}_1)$. さらに $\boldsymbol{x}_1$ を同様に表し, 代入し, これを繰り返していくと,

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^r c_{0i}\boldsymbol{a}_i + \sum_{i=1}^r c_{1i} f(\boldsymbol{a}_i) + \cdots + \sum_{i=1}^r c_{si} f^s(\boldsymbol{a}_i) + f^{s+1}(\boldsymbol{x}_{s+1}).$$

となる. f がべき零であることから, 十分大きな s に対し, $f^{s+1}=0$ となり, $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_r\in V$ が V の f 生成系となる. ■

系 5 V が f 安定で, f が V 上のべき零線形変換であるとき, V の極小 f 生成系のベクトルの数 $=\dim V-\dim\mathrm{Im}\,f$ で, 一定である.

(証明) $s=\dim V-\mathrm{rank}\,f=\dim\mathrm{Ker}\,(f)$ とおく. $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_r\in V$ が V の極小 f 生成系のとき, $r=s$ を示せば良い. 極小性から $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_r\in V$ は一次独立. $V=\mathbf{L}(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_r)+\mathrm{Im}\,(f)$ より, $r=\dim\mathbf{L}(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_r)\geq\dim V-\dim\mathrm{Im}\,(f)=s$. もし $r>s$ とすると $\dim\mathbf{L}(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_r)+\dim\mathrm{Im}\,(f)>\dim V$. で, この和が直和でないことになり, $\mathbf{L}(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_r)\cap\mathrm{Im}\,(f)\neq\{\mathbf{0}\}$.

$$^\exists c_i\in\mathbf{C},\boldsymbol{y}\in V;\sum_{i=1}^r c_i\boldsymbol{a}_i=f(\boldsymbol{y})\neq\mathbf{0}.$$

c_i の中に 0 でないものがあるので $c_k\neq 0$ とすると, $\boldsymbol{a}_k=(f(\boldsymbol{y})-\sum_{i\neq k}c_i\boldsymbol{a}_i)/c_k$ となるので, これを取り除いても, 簡単のため $k=1$ とすると $V=\mathbf{L}(\boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_r)+\mathrm{Im}\,(f)$ が成り立つので, 中山の補題から, f 生成形となってしまい極小性に反する. ゆえに $r=s$. ■

系 6 f が V 上のべき零線形変換であるとき, $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_r\in V$ が V の 極小 f 生成系 $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_r$ が一次独立で, $V=\mathbf{L}(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_r)\oplus\mathrm{Im}\,(f)$.

(証明) まず $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_r\in V$ が一次独立で, $V=\mathbf{L}(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_r)\oplus\mathrm{Im}\,(f)$ が成り立つとき, $r=\dim\mathbf{L}(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_r)=\dim V-\dim\mathrm{Im}\,(f)$ となり, 上の系から, これは極小でなければならない. 逆に $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_r\in V$ を極小とする. このとき $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_r$ は一次独立で, $V=\mathbf{L}(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_r)+\mathrm{Im}\,(f)$. 系から, $\dim\mathbf{L}(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_r)=r=\dim V-\dim\mathrm{Im}\,(f)$. となり, 上の和は直和となる. $V=\mathbf{L}(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_r)\oplus\mathrm{Im}\,(f)$. ■

定理 39 の証明 $\boldsymbol{x}\in V$ に対し, $m(\boldsymbol{x})=\min\{m\in\mathbf{N};f^m(\boldsymbol{x})=\mathbf{0}\}$ とおき, $\nu=\min\{m(\boldsymbol{x});\boldsymbol{x}\in V,\boldsymbol{x}\notin\mathrm{Im}\,(f)\}$ とおく. この最小値を与えるベクトル $\boldsymbol{a}\in V$ をとる. $\nu=m(\boldsymbol{a}),\boldsymbol{a}\notin\mathrm{Im}\,(f)$. 特に $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$. ここで $\boldsymbol{a}$ を含む V の極小 f 生成系 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_r$ を作ることが出来る. ($\boldsymbol{a}$ を含む基底をとれば, f 生成系で, 極小になるようにベクトルを減らしていけば良い.) 中山の補題の系から, $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_r$ は一次独立で, $V=\mathbf{L}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_r)\oplus\mathrm{Im}\,(f)$. 特に, $\boldsymbol{b}_i\notin\mathrm{Im}\,(f)$. そこで,

$$\begin{aligned}W_1&=\mathbf{L}(\boldsymbol{a},f(\boldsymbol{a}),f^2(\boldsymbol{a}),\dots,f^{\nu-1}(\boldsymbol{a})),\\W_2&=\mathbf{L}(\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_r,f(\boldsymbol{b}_1),\dots,f(\boldsymbol{b}_r),f^2(\boldsymbol{b}_1),\dots,f^2(\boldsymbol{b}_r),\dots)\end{aligned}$$

とおくと, これらは f 安定部分空間となる. ($f^\nu(\boldsymbol{a})=\mathbf{0}$ に注意.) 次が成り立つことを示す.

$$V=W_1\oplus W_2.$$

これが示されれば $W_1\neq\{\mathbf{0}\}$ と V が f 安定空間として直既約であることから $W_2=\{\mathbf{0}\}$ となり, $r=0$, つまり $\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_r$ は存在しないので, V の極小 f 生成系として $\boldsymbol{a}$ のみがとれることになり, 定理の証明が終わる.

$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_r$ が f 生成系であることから $V=W_1+W_2$ は分る. $W_1\cap W_2=\{\mathbf{0}\}$ を示すのにそうでないとして矛盾をいう. $\mathbf{0}$ でない元は次のように表される.

$$c_0\boldsymbol{a}+c_1f(\boldsymbol{a})+\dots+c_{\nu-1}f^{\nu-1}(\boldsymbol{a})=\sum_{i\geq 0}\sum_{j=1}^r d_{ij}f^i(\boldsymbol{b}_j)\quad(c_k,d_{ij}\in\mathbf{C}).\tag{7.1}$$

$s = \min\{i; c_i \neq 0 \text{ or } d_{ij} \neq 0\ (^\exists j)\}$ とおくと, $0 \leq s < \nu$. ここで

$$\boldsymbol{y} = c_0\boldsymbol{a} - \sum_{j\geq 1} d_{0j}\boldsymbol{b}_j = -\sum_{i\geq 1}\left(c_i f^i(\boldsymbol{a}) - \sum_{j\geq 1} d_{ij} f^i(\boldsymbol{b}_j)\right)$$

とおくと $\boldsymbol{y} \in \mathbf{L}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_r) \cap \mathrm{Im}\ (f) = \{\mathbf{0}\}$ より, $\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$ で, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_r$ が一次独立なことから, $c_0 = d_{0j} = 0\ (^\forall j)$. 従って, $s \geq 1$. 式 (7.1) で, 右辺を左辺に移項して考えれば, 全ての項に f^s がかかっているので,

$$\boldsymbol{x} = c_s\boldsymbol{a} + c_{s+1}f(\boldsymbol{a}) + \cdots + c_{\nu-1}f^{\nu-1-s}(\boldsymbol{a}) - \sum_{j=1}^{r}(d_{sj}\boldsymbol{b}_j + d_{s+1,j}f(\boldsymbol{b}_j) + \cdots)$$

とおくと, $f^s(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ を満たす. もし $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Im}\ (f)$ とすると $c_s\boldsymbol{a} - \sum_{j=1}^{r} d_{sj}\boldsymbol{b}_j \in \mathrm{Im}\ (f)$ となるが, $V = \mathbf{L}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_r) \oplus \mathrm{Im}\ (f)$ と $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_r$ の一次独立性から, 係数 $c_s = d_{sj} = 0$ となり, 矛盾する. 従って $\boldsymbol{x} \notin \mathrm{Im}\ (f)$. 所が $f^s(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}, 1 \leq s < \nu$ であったから, これは ν の最小性に反する. 従ってこのような s は存在しない. つまり $^\forall, i.j, c_i = 0, d_{ij} = 0$. これは $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ を意味する. ■

7.4 ジョルダンの標準形の一意性 (uniqueness of Jordan's normal form)

まず標準行列 $A = \begin{pmatrix} J_{r_1}(\alpha_1) & & \\ & J_{r_2}(\alpha_2) & \\ & & J_{r_3}(\alpha_3) \end{pmatrix}$ に対し, $P = \begin{pmatrix} O & E_{r_1} & \\ E_{r_2} & O & \\ & & E_{r_3} \end{pmatrix}$ で変換すると $P^{-1} = \begin{pmatrix} O & E_{r_2} & \\ E_{r_1} & O & \\ & & E_{r_3} \end{pmatrix}$ より, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_{r_2}(\alpha_2) & & \\ & J_{r_1}(\alpha_1) & \\ & & J_{r_3}(\alpha_3) \end{pmatrix}$ となるので, ジョルダン・セルを入れ換えてできる標準形は全て, A と相似である. この逆も成り立つ.

定理 41 (標準形の一意性) 2 つの n 次標準行列が相似

$$\begin{pmatrix} J_{r_1}(\alpha_1) & & & \\ & J_{r_2}(\alpha_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{r_m}(\alpha_m) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} J_{s_1}(\beta_1) & & & \\ & J_{s_2}(\beta_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{s_\ell}(\beta_\ell) \end{pmatrix}$$

$\Longleftrightarrow$ $m = \ell$, かつ, $J_{r_1}(\alpha_1), \ldots, J_{r_m}(\alpha_m)$ の並べ換えが, $J_{s_1}(\beta_1), \ldots, J_{s_\ell}(\beta_\ell)$.

この証明に必要な組合せの結果を述べる.

補題 12 単調非増加な 2 つの有限自然数列 $r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_m$, $s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_\ell$ について, $k = 0, 1, 2, \ldots$ に対し,

$$\rho_k = \sum_{i; r_i \geq k}(r_i - k), \quad \sigma_k = \sum_{i; s_i \geq k}(s_i - k)$$

とおく. $\{\rho_k\} = \{\sigma_k\}$ なら $m = \ell$ で, $r_i = s_i\ (1 \leq i \leq m)$.

(証明)　これはヤング図形を用いれば容易に分る. 同じ大きさの長方形の箱を第 1 行に r_1 個, 第 2 行に左を揃えて r_2 個, と順に並べておく. このとき ρ_0 は全ての箱の数で, ρ_1 は第 2 列から右にある箱の数というようになるので, 逆に第 1 列に $\rho_0 - \rho_1$ の箱を並べ, 第 2 列には上を揃えて $\rho_1 - \rho_2$ の箱を並べるというようにやっていけば, 上と同じ箱の並びが出来ることになり, これにより, $\{\rho_k\}$ から $\{r_i\}$ が復元できることになる. ■

(標準形の一意性の証明)　相似ならば固有値, 固有空間や一般固有空間の次元は共通となる. 従って同じ 1 つの固有値に対応するジョルダン・セルを全て対角に並べたものも同じ次数で相似になる. このときセルの並び換えで一致することを示せば良いので, 初めから全ての固有値 α_i, β_j は同じ α であるとして良い. さらに A, B の代わりに $A - \alpha E_n, B - \alpha E_n$ を考えることにより, 初めから $\alpha = 0$ として良い. 即ち,

$$A = \begin{pmatrix} J_{r_1}(0) & & & \\ & J_{r_2}(0) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{r_m}(0) \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} J_{s_1}(0) & & & \\ & J_{s_2}(0) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{s_\ell}(0) \end{pmatrix}$$

に対して定理を示せば良い. 並べ換えても相似なので, $r_1 \geq \cdots \geq r_m, s_1 \geq \cdots \geq s_\ell$ として良い. 証明すべきは $m = \ell$, かつ, $\{r_i\} = \{s_i\}$ である. 一般にジョルダン・セル $J_r(0)$ に対し, $\text{rank}\,(J_r(0)^k) = (r-k) \vee 0$ であるから, $k \geq 1$ に対し,

$$\rho_k = \text{rank}\,(A^k) = \sum_{i=1}^{m} \text{rank}\,(J_{r_i}(0)^k) = \sum_{i; r_i \geq k} (r_i - k), \quad \sigma_k = \text{rank}\,(B^k) = \sum_{j; s_i j \geq k} (s_j - k).$$

また $\rho_0 = \sigma_0 = n$ とする. $A \approx B$ なら $A^k \approx B^k$ で, それらのランクも等しいので, $\rho_k = \sigma_k$. よって, 前の補題から求める結果を得る. ■