線形代数学 I (Liniear Algebra I)

平場　誠示 (Seiji HIRABA)

2018 年 5 月 3 日

目 次

0 導入 (Introduction)

高校では, 2 次元, 3 次元のベクトル (平面ベクトル・空間ベクトル) については学んできたと思う.

大学では, これらを, n 次元まで一般化し, 更に, 次のようなベクトル空間まで, 拡張する.

ベクトル空間とは一般の集合 V に対し, 次のように定義される. ここで「$^\forall \boldsymbol{a} \in V$, 」とは「$V$ の任意の元 $\boldsymbol{a}$ に対して」で, 「$^\exists \boldsymbol{a}' \in V; \sim$」 は「ある V の元 $\boldsymbol{a}'$ が存在して〜をみたす」と解釈する.

定義 0.1 $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ (場合によっては $K = \mathbb{Q}$).

集合 V が K **ベクトル空間**, もしくは **抽象** K **ベクトル空間** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 和と定数倍が定義され, それらについて普通の計算ができる, 即ち, $^\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$, $^\forall \alpha \in K$, $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in V$, $\alpha \boldsymbol{a} \in V$;

(和の結合則) $^\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in V$, $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$.

(和の可換性) $^\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$, $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$.

(零元の存在) $^\exists \boldsymbol{0} \in V; ^\forall \boldsymbol{a} \in V, \boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$.

(マイナスの存在) $^\forall \boldsymbol{a} \in V, ^\exists \boldsymbol{a}' \in V$; $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$. この $\boldsymbol{a}' = -\boldsymbol{a}$ と表す.

(1 によるスカラー倍) $^\forall \boldsymbol{a} \in V, 1 \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$.

(スカラー倍の結合則) $^\forall \boldsymbol{a} \in V, ^\forall \alpha, \beta \in K$, $\alpha(\beta \boldsymbol{a}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{a}$.

(分配則) $^\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V, ^\forall \alpha, \beta \in K$, $\alpha(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \alpha \boldsymbol{a} + \alpha \boldsymbol{v}$, $(\alpha + \beta)\boldsymbol{a} = \alpha \boldsymbol{a} + \beta \boldsymbol{a}$.

このとき, V の元を**ベクトル (vector)**, K の元を**スカラー (scalar)** という.

しかし, 成分が全て, 数である「数ベクトル空間」については, もっと簡単に定義ができる.

1 数ベクトル空間 (Numerical vector spaces)

1.1 集合, 写像, 関数

・あるものの集まりを**集合 (set)** といい, その中の 1 つ 1 つを, **要素, 元 (element)** という. また集合の中の一部分を**部分集合 (subset)** という. a が集合 A の元である $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $a \in A$.

$A \subset X$: A が集合 X の部分集合 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^\forall a \in A, a \in X \iff [a \in A \Rightarrow a \in X]$.

またこれと同じ意味だが, $X \supset A$ と書くと, X **は** A **を含む**という.

[数の集合]

- $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$: **自然数 (natural numbers)**.
- $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} = (\pm\mathbb{N}) \cup \{0\}$: **整数 (integers)** (独: Ganz Zahlen の Z).
- $\mathbb{Q} = \{m/n; m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$: **有理数 (rational numbers)** 有限小数 or 循環無限小数 (本当は有比数と訳すはずだったらしい).
- また有理数ではないが, π や $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ 等のように, 兎に角, 存在する数 : 循環しない無限小数を**無理数 (irrational numbers)** という. その全体を特に表す記号は無いが $\mathbb{Q}^c = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ と表すことが多い. (有理数でない実数ということだが, これは定義ではないことに注意.)
- $\mathbb{R}$: 有理数と無理数を合わせた全体を**実数 (real numbers)** という.
- $\mathbb{C} = \mathbb{R} + i\mathbb{R} = \{z = x + iy; x, y \in \mathbb{R}\}$: **複素数 (complex numbers)**. ($i = \sqrt{-1}$ は虚数単位; $i^2 = -1$).

四則演算について閉じているものを 「**体 (fields)**」 といい, **有理数体 $\mathbb{Q}$, 実数体 $\mathbb{R}$, 複素数体** $\mathbb{C}$ がそうである.

以下は, 講義では適宜, 必要になったときに述べるので, ここでは飛ばしてもらって良い.

- **写像 (mapping)** $f : X \to Y$ とは, ある集合 X の各元 1 つずつに対し, ある集合 Y の元が 1 つずつだけ対応するものをいう. このとき, X を**定義域 (domain)**, Y を**値域 (range)** という.

  [注] Y の元が 2 つ対応したり, 対応するものがない場合は写像とはいわない. また $f(X) \subset Y$ に注意.

- **関数 (function)** とは数の集合に値をとる写像, i.e., 値域が $\mathbb{C}$ の部分集合である写像; $Y \subset \mathbb{C}$.
- 写像 $f : X \to Y$ が

  単射 (injection) or **1 対 1 (1-1, one to one)**

  $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $[f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y] \iff [x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y)]$

  全射 (surjection) or **上への写像 (onto)**

  $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $Y \subset f(X)$, i.e., $Y = f(X) \iff {}^\forall y \in Y, {}^\exists x \in X; y = f(x)$.

  また単射かつ全射のとき, **全単射 (bijection, 1-1 onto)** といい, このとき, 逆の対応も写像となり, これを**逆写像 (inverse mapping)** といい, $f^{-1} : Y \to X$ と表す (エフ・インバースと読む).

さらに $A \subset X$ に対し, 写像 $f : X \to Y$ を A に制限したものを $f|_A : A \to Y$ と表し, f の A への**制限写像**という.

1.2 n 次元実ベクトル空間, 一次独立, 実ベクトルの内積

[n 次元実ベクトル空間]
$n \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ に対し,

$$\boldsymbol{a} = {}^t(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

ここで ${}^t(*)$ は**転置**を表し, 横に並べたものを縦に変えたもの, またはその逆を表す.
今後, 縦に書くとスペースを使うので, 特に必要のない限りは, この転置を用いて, 横に並べて表すことにする.

定義 1.1 $\mathbb{R}^n$ が ($\mathbb{R}$ 上の) n 次元**実ベクトル空間 (real vector space)** $\overset{\text{def}}{\iff}$ 次のように和と定数倍が定義されるときをいう. $\boldsymbol{a} = {}^t(a_1, a_2, \dots, a_n), \boldsymbol{b} = {}^t(b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ に対し,

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = {}^t(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n), \quad c\boldsymbol{a} = {}^t(ca_1, ca_2, \dots, ca_n).$$

ここで, 定数 c のことを**スカラー (scalar)** といい, 定数倍のことを**スカラー倍**という.
このとき, 元 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ のことを, ($\mathbb{R}$ 上の) n 次元**実ベクトル (real vector)** という. 単に, **数ベクトル**ということもある. 特に $\boldsymbol{0} = {}^t(0, 0, \dots, 0)$ は**零ベクトル**, $\boldsymbol{e}_1 = {}^t(1, 0, \dots, 0), \boldsymbol{e}_2 = {}^t(0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \boldsymbol{e}_n = {}^t(0, \dots, 1, 0)$ は n 次元**基本ベクトル**と呼ばれる.

数ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ とスカラー x, y に対し, 明らかに次が成り立つ.

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}), \quad \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}, \quad (xy)\boldsymbol{a} = x(y\boldsymbol{a}), \quad x(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = x\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}, (x+y)\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{a}.$$

順に**和の結合則**, **和の交換則**, **スカラー倍の結合則**, 最後の 2 つは**分配則**という. これから, $\mathbb{R}^n$ が一番初めに定義した意味での $\mathbb{R}$ ベクトル空間であることが分かる (確認せよ).

[一次独立性]
数学を勉強するには, 色々な問題を解くのが近道である.

例題 1.1 2 つの空間ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ が平面を張る $\iff$ $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は**一次独立**. これを証明せよ.

しかし, 問題を解くためには, まず, 言葉の定義を知らなければ話にならない.

定義 1.2 m 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_m$ の**一次結合 (linear combination)** とは, スカラー $c_1, c_2, \dots, c_m$ に対し, $\displaystyle\sum_{i=1}^m c_i\boldsymbol{a}_i = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n$ をいう. また $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_m$ が**一次独立 (linear independent)** $\overset{\text{def}}{\iff}$ 「$\displaystyle\sum_{i=1}^m c_i\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{0} \Longrightarrow c_i = 0$ $(i = 1, 2, \dots, m)$」さらに一次独立でないときは**一次従属 (linear dependent)** であるという.

問 1.1 一次独立の否定命題を述べよ. 即ち, ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ が一次従属 $\overset{\text{def}}{\iff}$?

例えば, 1 つのベクトル $\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ なら一次従属, $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ なら一次独立 (ただこの概念はベクトルが 1 つのときには意味が無く, 本質的には 2 つ以上で意味を持つ). 2 つのベクトルについては, それらが平面を張るときには一次独立となる.

(例題 1.1 の解) ($\Rightarrow$) $x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ として, もし $x \neq 0$ なら, $\boldsymbol{a} = -(y/x)\boldsymbol{b}$. $y \neq 0$ なら, $\boldsymbol{b} = -(x/y)\boldsymbol{a}$. いずれも $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は同じ直線上にあることになり矛盾. ($\Leftarrow$) もし, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が平面を張らないとすると, 同じ直線上にあることになり, ${}^{\exists}c_1; \boldsymbol{a} = c_1\boldsymbol{b}$ or ${}^{\exists}c_2; \boldsymbol{b} = c_2\boldsymbol{a}$. いずれも仮定に反するので, 結局, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は平面を張る. ■

例題 1.2 $\boldsymbol{a} = {}^t(1,1,1)$, $\boldsymbol{b} = {}^t(1,2,3)$, $\boldsymbol{c} = {}^t(-1,0,1)$ について, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は一次独立だが, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は一次従属であることを示せ.

(解) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は明らかに同一直線上にないので, 平面を張る. 従って, 上の例題から一次独立. また, $x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ とすると, $x + y - z = 0, x + 2y = 0, x + 3y + z = 0$ で, これを解くと, $x = -2y, z = x + y = -y$ で, y は任意となり, 一次従属. ■

例題 1.3 空間内のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が一次従属 $\iff$ この 3 つのベクトルが同一平面上にある. このことを示せ.

(解) $x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ で, もし $x \neq 0$ なら, $\boldsymbol{a} = -(y/x)\boldsymbol{b} - (z/x)\boldsymbol{c}$ で, $\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の張る平面上にある. 他も同様. 逆に, 同一平面上にあれば, $\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c}$ or $\boldsymbol{b} = z\boldsymbol{c} + x\boldsymbol{a}$ or $\boldsymbol{c} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b}$ と表せるので, 一次従属. ■

[実ベクトルの内積]

2 つの実ベクトル $\boldsymbol{a} = {}^t(a_1, a_2, \ldots, a_n), \boldsymbol{b} = {}^t(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ について, **標準内積 (standard inner product)** $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ を

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

と定義する. このとき明らかに次の性質を満たす.

補題 1.1 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ と $x, y \in \mathbb{R}$ に対し,

$$\begin{array}{ll} \text{(双線形性)} & \begin{cases} (x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = x(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + y(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \\ (\boldsymbol{a}, x\boldsymbol{b} + y\boldsymbol{c}) = x(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + y(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) \end{cases} \\ \text{(対称性)} & (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) \\ \text{(正値性)} & (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \geq 0 \quad \text{等号成立は } \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \text{ のときに限る.} \end{array}$$

このとき $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}$ を $\boldsymbol{a}$ の**長さ**という. また $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$ のとき, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は**直交する**という.

問 1.2 $|\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 \pm 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + |\boldsymbol{b}|^2$ を示せ.

この問から次の例題がすぐ分かる.

例題 1.4 次の等式を示せ.

(1) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \dfrac{1}{2}\left(|\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 - |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|^2\right)$

(2) $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|^2 + |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|^2 = 2(|\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2)$ (中線定理)

補題 1.2 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角を θ とすると $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$.

（証明）余弦定理から $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 - 2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ で, 上の問 1.2 から明らか. ■

問 1.3 余弦定理を示せ. 三平方の定理についても示せ.

補題 1.3 次が成り立つ.

(1) (**シュヴァルツの不等式 (Schwartz's inequality)**) $|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})| \leq |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$.

(2) (**三角不等式 (triangle inequality)**) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$.

（証明）(1) 上の補題から明らかで, (2) は 2 乗して展開すれば, (1) から明らか. ■

補題 1.4 $\mathbb{R}^n$ の $\boldsymbol{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ のどの 2 つのベクトルも互いに直交するとき, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ は一次独立となる.

（証明）$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_r\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{0}$ とする. $\boldsymbol{a}_i$ との内積をとれば, $0 = c_i(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_i) = c_i|\boldsymbol{a}_i|^2$. $\boldsymbol{a}_i \neq \boldsymbol{0}$ より, $c_i = 0$. ■

1.3 空間ベクトルの外積

3 次元の空間では, 内積の他に外積という概念が定義できる.

定義 1.3 $\boldsymbol{a} = {}^t(a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b} = {}^t(b_1, b_2, b_3)$ に対し,

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = {}^t(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

と定義し, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の**外積 (cross product)** または**ベクトル積 (vector product)** という. (最後の式は後で定義する行列式による形式的表現.)

[注] どうもここでいう外積は本来なら, **クロス積**と呼ぶべきで, 「外積」を調べると, exterior product という概念が別にあり, 3 次元のときはクロス積と同じである. また他に outer product という概念もある.

この外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は実は, 向きが $\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ へネジを回したときに進む方向で, 大きさが $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ でできる平行四辺形の面積に等しいものとしても定義できる.

補題 1.5 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ と $x, y \in \mathbb{R}$ に対し,

$$\begin{array}{ll} \text{(双線形性)} & \begin{cases} (x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = x(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) + y(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \\ \boldsymbol{a} \times (x\boldsymbol{b} + y\boldsymbol{c}) = x(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) + y(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) \end{cases} \\ \text{(歪対称性)} & \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}), \text{ および } \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}. \\ \text{(直交性)} & (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) = 0. \end{array}$$

（証明）双線形性と歪対称性は定義式から明らか. 最後の直交性も計算すれば明らかで, $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = (a_2b_3 - a_3b_2)a_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)a_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)a_3 = 0$. $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b})$ も同様だが, $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) = -(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$. ■

例題 1.5 空間ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対し, $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2$ となることを示せ.

計算すれば明らかで, これから $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ の大きさが, $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ でできる平行四辺形の面積であることが分る.

問 1.4 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ でできる平行四辺形の面積が $\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})^2}$ で与えられることを示せ.

例題 1.6 空間ベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ に対し, $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ が一次従属 $\iff \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}]$ を示せ.

$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ が一次従属 $\iff {}^\exists x\in\mathbb{R}; \boldsymbol{a}=x\boldsymbol{b}$ or ${}^\exists y\in\mathbb{R}; \boldsymbol{b}=y\boldsymbol{a}$ （これは $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ or $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ のときも含むことに注意）で, 上の例題と $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ から明らか.

1.4 一般の体上の数ベクトル空間

$\mathbb{R}$ 上の実ベクトル空間と同じように, 複素数体 $\mathbb{C}$ または有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の数ベクトル空間を考えることができる.

$K=\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ として, それを成分とする n 次元**数ベクトル空間** K^n を同様に定義し, その元 $\boldsymbol{a}\in K^n$ を (K 上の) n 次元**数ベクトル**という. (正確には $K=\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ に応じて, **有理ベクトル**, **実ベクトル**, **複素ベクトル**という.)

さらに $\mathbb{C}^n$ ではスカラー倍の元を $K=\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ として K **上のベクトル空間**として定義でき, $\mathbb{R}^n$ では $K=\mathbb{Q},\mathbb{R}$ として定義できる (勿論, $\mathbb{Q}^n$ では $K=\mathbb{Q}$ のみである). このとき K のことを**係数空間**という (ただ, 普通, 単にベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ と言ったときには, スカラーは複素数で, ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ なら実数で, ベクトル空間 $\mathbb{Q}^n$ なら有理数である).

例題 1.7 $\mathbb{C}^3$ において, 次の 3 次元複素ベクトルが一次独立かどうか判定せよ.

$$\boldsymbol{a}={}^t(1,1,1),\ \boldsymbol{b}={}^t(1,-i,3),\ \boldsymbol{c}={}^t(-1,0,1)$$

2 行列 (Matrix)

2.1 行列の定義，行列の積

定義 2.1 m,n を自然数として, 縦に m 個, 横に n 個の $m\times n$ のマス目状に数字を並べたものを**行列 (matrix)** という. 正確には $m\times n$ 行列という.

一般的に次のように表される.

$$A=(a_{ij})=(a_{ij})_{1\le i\le m,1\le j\le n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{bn} \end{pmatrix}$$

同じサイズの行列 $A=(a_{ij}),B=(b_{ij})$ に対し, $A=B \overset{\text{def}}{\iff} {}^\forall i,j, a_{ij}=b_{ij}$ と定義する.

また和とスカラー c 倍を次で定義する.

$$(a_{ij})+(b_{ij})=(a_{ij}+b_{ij}),\quad c(a_{ij})=(ca_{ij})$$

また, 行列 A の (i,j) 成分を $(A)_{ij}$ と表すこともある, i.e., $(A)_{ij}=a_{ij}$.

定義 2.2 $m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$ と $n \times r$ 行列 $B = (b_{ij})$ に対し, 積 $AB = (c_{ij})$ を

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

と定義. このとき AB は $m \times r$ 行列.

有限個の和については順序交換がいつでもできるので,

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} = \sum_{i,j;1\le i\le m,1\le j\le n} = \sum_{i,j} \quad \text{と表すこともある.}$$

定理 2.1 $m \times n$ 行列 A と $n \times r$ 行列 B, C, スカラー c に対し, 次が成り立つ.

$$(1)\ A(cB) = c(AB) \qquad (2)\ A(B+C) = AB + AC \qquad (3)\ (A+B)C = AB + BC.$$

（証明）成分で表し, 積の定義を用いれば明らか. 実際, (i,j) 成分は (1) $\sum_k a_{ik}(cb_{kj}) = c\sum_k a_{ik}b_{kj}$, (2) $\sum_k a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) = \sum_k a_{ik}b_{kj} + \sum_k a_{ik}c_{kj}$, (3) も同様. ■

定理 2.2 $m \times n$ 行列 A と $n \times r$ 行列 B, $r \times s$ 行列 C について, 次の結合法則が成り立つ.

$$(AB)C = A(BC) \quad \text{従って, これを } ABC \text{ と表す.}$$

（証明）$\sum_\ell (\sum_k a_{ik}b_{k\ell})c_{\ell j} = \sum_k a_{ik}(\sum_\ell b_{k\ell}c_{\ell j})$. ■

2.2 いろいろな行列, 転置行列, 行列のトレース

[零行列] $O = O_{mn}$: 全ての成分が 0 である $m \times n$ 行列.

[正方行列] $n \times n$ 行列を (n 次) 正方行列, または, 単に, n 次行列という.

[単位行列] $E = E_n$: n 次行列で, 対角成分だけが 1 で, 他が 0 であるような行列; (n 次) 単位行列 **(unit matrix)** という. またクロネッカーのデルタ $\delta_{ij} = 1$ $(i = j)$, $= 0$ $(i \neq j)$ を用いると $E = (\delta_{ij})$ と表される. 明らかに n 次行列 A に対し, $AE = EA = A$ をみたす.

[行列単位] E_{ij}: n 次行列で, (i,j) 成分だけが 1 で, 他が 0 であるような行列. (n 次) 行列単位という. これの (k,l) 成分は $\delta_{ki}\delta_{jl}$ と表される. また n 行列 $A = (a_{ij})$ に対し, $A = \displaystyle\sum_{i,j} a_{ij}E_{ij}$ と表される. 同様に $E = \sum_{i,j} \delta_{ij}E_{ij}$.

問 2.1 $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$ となることを示せ.

（解） E_{ij} の (s,t) 成分: $\delta_{si}\delta_{jt}$, E_{kl} の (t,u) 成分: $\delta_{tk}\delta_{lu}$ より, 左辺の (s,u) 成分:

$$(E_{ij}E_{kl})_{su} = \sum_t (\delta_{si}\delta_{jt})(\delta_{tk}\delta_{lu}) = \sum_t \delta_{si}(\delta_{jt}\delta_{tk})\delta_{lu}$$

ここで, 真ん中の $\delta_{jt}\delta_{tk}$ は $j = k$ のときは $t = j$ なら 1 となり, $j \neq k$ のときは t が何であろうと 0 になる. 即ち, $\delta_{jt}\delta_{tk} = \delta_{jk}$. 従って $(E_{ij}E_{kl})_{su} = \delta_{si}\delta_{jk}\delta_{lu} = \delta_{jk}(\delta_{si}\delta_{lu}) = \delta_{jk}(E_{il})_{su}$. ■

定義 2.3 $m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$ に対し, 列と行を入れ換えた行列, 即ち, (i,j) 成分が a_{ji} である行列を ${}^tA$ と表し, A の転置行列 **(transposed matrix)** という. (つまり, ${}^tA$ の (i,j) 成分 $({}^tA)_{ij} = a_{ji}$.)

定理 2.3 $m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$ と $n \times r$ 行列 $B = (b_{ij})$ に対し, ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.

（証明）$(AB)_{ij} = \sum_k a_{ik}b_{kj}$ であるから,
${}^t(AB)_{ij} = \sum_k a_{jk}b_{ki} = \sum_k b_{ki}a_{jk} = \sum_k ({}^tB)_{ik}({}^tA)_{kj} = ({}^tB\,{}^tA)_{ij}$. ■

n 次行列 A の**対角和 (trace)**: $\mathrm{tr}\ A = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$. このとき 2 つの n 次行列 A, B に対し, $\mathrm{tr}\ (AB) = \mathrm{tr}\ (BA)$ が成り立つ. 実際, $\sum_i(\sum_k a_{ik}b_{ki}) = \sum_i(\sum_k b_{ki}a_{ik})$.

[注] 3 つの n 次行列 A, B, C に対しては, $\mathrm{tr}\ (ABC) = \mathrm{tr}\ (BCA) = \mathrm{tr}\ (CAB)$ だが, $\mathrm{tr}\ (ACB)$ とは一般に等しいとは限らない.

問 2.2 $\mathrm{tr}\ (ABC) \neq \mathrm{tr}\ (ACB)$ となる行列の例を挙げて, 確かめよ.

2.3 線形写像としての行列

ここでは $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ とする. 即ち, K^n を実ベクトル空間, または複素ベクトル空間とする.

定義 2.4 写像 $f : K^n \to K^m$ が**線形写像 (linear mapping)** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in K^n$, $\forall x \in K$,

$$(1)\ f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = f(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{b}) \qquad (2)\ f(x\boldsymbol{a}) = xf(\boldsymbol{a}).$$

特に $m = n$ のときは線形写像 $f : K^n \to K^n$ を K^n 上の**線形変換 (linear transform)** という.

例 2.1 $m \times n$ 行列 A に対し, $f_A(\boldsymbol{a}) = A\boldsymbol{a}$ $(\boldsymbol{a} \in K^n)$ と定義すると, $f_A : K^n \to K^m$ は線形写像となる. これを**行列 A によって定義される線形写像**という.

実はこの逆が成立する.

定理 2.4 写像 $f : K^n \to K^m$ が線形写像ならば, $\exists A$: $m \times n$ 行列; $f = f_A$.

（証明）K^n の基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ を用いて, 各 $1 \leq j \leq n$ に対し, $\boldsymbol{a}_j = f(\boldsymbol{e}_j)$ として, $A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ とおけば良い. 実際, $\forall \boldsymbol{x} \in K^n, \boldsymbol{x} = \sum x_j\boldsymbol{e}_j$ より, $f(\boldsymbol{x}) = \sum x_j f(\boldsymbol{e}_j) = \sum x_j\boldsymbol{a}_j = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}$. ■

定理 2.5 $r \times m$ 行列 A と $m \times n$ 行列 B によって定まる線形写像 $f_A : K^m \to K^r$ と $f_B : K^n \to K^m$ に対し, 合成写像は $f_A \circ f_B = f_{AB}$ をみたす.

（証明）$(f_A \circ f_B)(\boldsymbol{x}) = f_A(f_B(\boldsymbol{x})) = A(B\boldsymbol{x}) = (AB)\boldsymbol{x} = f_{AB}(\boldsymbol{x})$. ■

2.4 逆行列

定義 2.5 n 次行列 A に対し, $AX = XA = E$ をみたす n 次行列 X が存在するとき, この X を A の**逆行列 (inverse matrix)** といい, A^{-1} と表す. またこのとき A は**正則行列 (regular matrix)** であるという.

実は, 後に示すが, $AX = E$ or $XA = E$ の一方の条件のみ満たせば十分であることがいえる ($\to$ 例題 5.2). この逆行列は存在すれば唯一つである. 実際, X' も同じ条件をみたすなら, $X' = X'E = X'(AX) = (X'A)X = EX = X$ となる.

例題 2.1 n 次正則行列 A, B に対し, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ となることを示せ.

（解）実際, $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E$. 同様にすれば, $(B^{-1}A^{-1})(AB) = E$. ■

3 平面・空間の線形変換 (Linear transforms on the plane or the space)

3.1 2 次行列の逆行列，平面上の回転と鏡映

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し, $\widetilde{A} = \mathrm{Cof}(A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ を A の**余因子行列 (cofactor matrix)** という. また $\det A = ad - bc$ とおき, A の**行列式 (determinant)** という. これにより,

$$A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = E, \quad \text{i.e.,} \quad A\,\mathrm{Cof}(A) = \mathrm{Cof}(A)A = (\det A)E$$

となり, 次が成り立つ.

定理 3.1 2 次行列 A に対し, A が正則 $\iff \det A \neq 0$. このとき $A^{-1} = \dfrac{\widetilde{A}}{\det A} = \dfrac{\mathrm{Cof}(A)}{\det A}$.

（証明）もし $\det A \neq 0$ なら, $A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = (\det A)E$ をそれで割れば, 定義から正則で, 逆行列の一意性から $A^{-1} = \widetilde{A}/(\det A)$ も得る. 逆に A が正則のとき, A^{-1} を $\widetilde{A}A = (\det A)E$ に右からかけて $\widetilde{A} = (\det A)A^{-1}$. もし $\det A = 0$ とすると, $\widetilde{A} = O$ で, 定義から, $A = O$ となってしまい, 矛盾する. ■

[原点中心の回転と原点を通る直線についての鏡映]

定理 3.2 平面ベクトル $\boldsymbol{a}$ を θ だけ正の方向へ (反時計回りに) 回転させる写像を $r_\theta(\boldsymbol{a})$ とすると, これは線形写像で, 従って対応する 2 次行列 R_θ が存在する; $r_\theta(\boldsymbol{a}) = R_\theta \boldsymbol{a}$. このとき $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. また明らかに $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$.

ベクトル $\boldsymbol{a}$ をある原点を通る直線 ℓ に関して対称に移動したもの (鏡映) を $t_\ell(\boldsymbol{a})$ とおくと, これも線形写像となる. 対応する行列を T_ℓ とすると, $t_\ell(\boldsymbol{a}) = T_\ell \boldsymbol{a}$ で, 直線 ℓ と x 軸のなす角が τ のとき, $T_\ell = \begin{pmatrix} \cos 2\tau & \sin 2\tau \\ \sin 2\tau & -\cos 2\tau \end{pmatrix}$.

（証明）線形写像なることは, 図を描いて考えれば明らかであるから, R_θ, T_ℓ を求めれば良い. まず $R_\theta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. とおくと, $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対し, $R_\theta \boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, R_\theta \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$, また $r_\theta(\boldsymbol{e}_1) = {}^t(\cos\theta, \sin\theta), r_\theta(\boldsymbol{e}_2) = {}^t(-\sin\theta, \cos\theta)$ となることから, 題意を得る. 同様に, T_ℓ についても $\boldsymbol{e}_1$ は 2τ 回転し, $\boldsymbol{e}_2$ は直線 ℓ との角が $-(\pi/2 - \tau)$ なので, その 2 倍回転することから, $t_\ell(\boldsymbol{e}_1) = {}^t(\cos 2\tau, \sin 2\tau), t_\ell(\boldsymbol{e}_2) = {}^t(-\sin(2\tau - \pi), \cos(2\tau - \pi)) = {}^t(\sin 2\tau, -\cos 2\tau)$ となり, 題意を得る. ■

3.2 直交行列

定義 3.1 A が n 次**直交行列 (orthogonal matrix)** $\overset{\text{def}}{\iff}$ A は n 次実行列 で, $A{}^tA = {}^tAA = E$.

実は次の次の定理で述べるように, 2 次の直交行列は, 回転か鏡像のどちらかになる. 正確には, 行列式が 1 なら回転に, -1 なら鏡像となる.

n 次行列 A はそれぞれの列を n 次元実ベクトルとして $A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ と表すことができる. このとき, 積の定義より, 明らかに次が成り立つ.

n 次行列 $A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ と $B = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ に対し,

$$
{}^tAB = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1) & \cdots & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b}_1) & \cdots & (\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b}_n) \end{pmatrix}.
$$

定理 3.3 n 次行列 $A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ が直交行列 $\iff$ $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が長さ 1 の互いに直交するベクトル、, i.e., $(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = \delta_{ij}$.

定理 3.4 A が 2 次の直交行列は, 行列式が 1 なら回転に, -1 なら鏡像となる.

（証明）$A = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ とおくと, $\boldsymbol{a}$ は大きさ 1 のベクトルなので, 適当な回転 $-\theta$ により, 基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1$ に移るとして良い, i.e., $R_{-\theta}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_1$ ($\iff$ $\boldsymbol{a} = R_\theta \boldsymbol{e}_1$). また $\boldsymbol{b}$ も大きさ 1 で, $\boldsymbol{a}$ に直交しているので, 同じ回転により, $\boldsymbol{e}_2$ か $-\boldsymbol{e}_2$ に移る. ここで, $\boldsymbol{e}_2$ に移るとき,

$$
A = (R_\theta \boldsymbol{e}_1, R_\theta \boldsymbol{e}_2) = R_\theta(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = R_\theta E = R_\theta.
$$

$-\boldsymbol{e}_2$ に移るなら, 同様にして

$$
A = R_\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}
$$

となり, x 軸とのなす角が $\theta/2$ の原点を通る直線についての鏡像となる. また $\det A$ は明らかに回転なら -1 で, 鏡像なら 1 となるので, 結局, 直交行列なら, 逆も成り立つことになる. ■

3.3 3 次の逆行列, 複素平面

[3 次行列の逆行列]

補題 3.1 3 つの空間ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対し, $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$. さらに $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の中に等しいベクトルがあれば, この値は 0.

外積の定義式より明らか. また $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ なら $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ なので, 他も同様で, 最後の主張も明らか.

定義 3.2 3 次実行列 $A = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ に対し, 上の補題の等しい値を $\det A$ とおいて, A の**行列式**という. 即ち, $A = (a_{ij})$ とすると

$$
\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.
$$

行列 $A' = {}^t(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}, \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$ を考える. $A'A = {}^t(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}, \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ より,

$$
A'A = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}) \\ (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) \\ (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{pmatrix} = (\det A)E.
$$

そこで A の余因子行列を $\widetilde{A} = \mathrm{Cof}(A) = A' = {}^t(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}, \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$ とおくと, $\widetilde{A}A = (\det A)E$ を満たす. 同様に $A\widetilde{A} = (\det A)E$ も満たす.

定理 3.5 3 次行列 A に対し, A が正則 $\iff$ $\det A \neq 0$. このとき $A^{-1} = \dfrac{\widetilde{A}}{\det A} = \dfrac{\mathrm{Cof}(A)}{\det A}$.

（証明）$\det A \neq 0$ なら, A が正則で, $A^{-1} = \widetilde{A}/(\det A)$ なることは 2 次の時と全く同じである. 逆は, A が正則なら, A^{-1} を $\widetilde{A}A = (\det A)E$ に右からかけて $\widetilde{A} = (\det A)A^{-1}$ で, もし $\det A = 0$ とすると, $\widetilde{A} = O$ で, 定義から, $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$. このとき, それぞれのベクトルが一次従属となるので, $[\boldsymbol{b} = x\boldsymbol{a}$ or $\boldsymbol{a} = x'\boldsymbol{b}]$, $[\boldsymbol{c} = y\boldsymbol{b}$ or $\boldsymbol{b} = y'\boldsymbol{c}]$, $[\boldsymbol{a} = z\boldsymbol{c}$ or $\boldsymbol{c} = z'\boldsymbol{a}]$ となる. いずれの場合でも 1 つのベクトルで, 残りのベクトルが表せる. 例えば, $\boldsymbol{b} = x\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c} = y\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} = z\boldsymbol{c}$ なら $\boldsymbol{b} = x\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c} = xy\boldsymbol{a}$ となり, $A = (\boldsymbol{a}, x\boldsymbol{a}, xy\boldsymbol{a})$. しかし, これは逆行列を持たないので矛盾. 実際, $X = {}^t(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ として, もし

$$E = XA = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}) & x(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}) & xy(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}) \\ (\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{a}) & x(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{a}) & xy(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{a}) \\ (\boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{a}) & x(\boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{a}) & xy(\boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{a}) \end{pmatrix}$$

なら, 第 1 行目から, $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}) = 1$ で, $x = 0$ となるが, これは明らかに 2 行, 3 行の結果に反する. 他の場合も同様である. ■

例題 3.1 3 次実行列 $A = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ に対し, 次は同値であることを示せ.
(1) A は逆行列をもつ, i.e., $^\exists A^{-1}$. (2) $\det A \neq 0$
(3) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は同一平面上にない. (4) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は一次独立.

（解）(1) $\iff$ (2) は証明済みで, (3) $\iff$ (4) は容易なので, (2) $\iff$ (3) のみを示す. $\det A = (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ であったので, もし, $\det A = 0$ とすると, $(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) = 0$ で, $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$ は $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に直交するベクトルで, $\boldsymbol{a}$ がそれと直交するということは, $\boldsymbol{a}$ が $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ で張られる平面上にあることになる. 逆に, もし $\boldsymbol{a}$ が $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ で張られる平面上にあれば, $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{b} + y\boldsymbol{c}$ と表せて, $\det A = (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) = 0$ となる. 他も同様. ■

[複素平面]
複素数 $z = x + iy \in \mathbb{C}$ は**虚数単位**を $i = \sqrt{-1}; i^2 = -1$ として, $x, y \in \mathbb{R}$ によって定義される. $x = \mathrm{Re}\, z, y = \mathrm{Im}\, z$ と表し, それぞれ z の**実部 (real part)**, **虚部 (imaginary part)** という. これと $\mathbb{R}^2$ のベクトル ${}^t(x, y)$ を対応させることにより, $\mathbb{C}$ と $\mathbb{R}^2$ はベクトル空間として同一視できる.

補題 3.2 $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$ として, $\mathbb{C}$ 上で α をかけるという変換は, 複素平面上の線形変換で, 行列 $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ が対応する.

（証明）$f_\alpha(z) = \alpha z$ が線形変換であることは明らか. $\alpha(1 + 0 \cdot i) = \alpha = a + ib, \alpha(0 + 1 \cdot i) = i\alpha = -b + ia$ から, 対応するベクトル ${}^t(1, 0)$ が ${}^t(a, b)$ に, ${}^t(0, 1)$ が ${}^t(-b, a)$ に写ることから行列も分かる. ■

例題 3.2 実数全体 $\mathbb{R}$ と虚数単位 i を用いて構成した複素数全体 $\mathbb{C}$ が, 四則演算について何の矛盾も無く閉じていることを, 上の補題の関係を用いて, 実行列の世界で説明せよ.

[解] まず複素数を α 倍するという変換 $f_\alpha; f_\alpha(z) = \alpha z$ に積を合成で定義することにより, 複素数の積が対応する, i.e., $f_\beta f_\alpha = f_\beta \circ f_\alpha = f_{\beta\alpha}$. 従って, $\alpha \in \mathbb{C}$ と f_α が 1 対 1 に対応する. さらに, 次の実行列の集合がベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ において, 四則演算について閉じていることから容易に説明できる.

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

■

大きさ 1 の複素数 $\alpha = a + ib$ は $a^2 + b^2 = 1$ より, $^\exists\theta; a = \cos\theta, b = \sin\theta$ と表されるので, $\alpha = \cos\theta + i\sin\theta$ をかけるのは R_θ が対応する. 従って $R_\theta R_\tau = R_{\theta+\tau}$ より,

$$(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\tau + i\sin\tau) = \cos(\theta + \tau) + i\sin(\theta + \tau).$$

さらに帰納的に次の**ドゥ・モアブルの等式 (de Moivre's equation)** が成り立つ.

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

4 行列式の定義 (Definition of determinant)

4.1 一般の行列の行列式と逆行列

まず, 行列式とはそもそも何のためのものなのかということを, 簡単に説明してから, 定義を与え, その性質について述べて行きたいと思う.

行列式 $\det A$ とは何かというと, 2 次, 3 次の行列で見たように, A が正則かどうかを判定するための値と言える. もう少し, 正確には, $\widetilde{A} = \mathrm{Cof}(A)$ として, 「$A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = (\det A)E$ 」をみたすように定義できれば良いのである (勿論, 余因子行列 $\widetilde{A} = \mathrm{Cof}(A)$ も定義されなくてはならないが, 後で述べるように, これは実は, 行列式を用いて定義される). ただ, これだけでは定数倍による違いが出ないので, 「$\det E = 1$ 」という条件もつけておくことにする. これにより, 次の定理を得ることができる.

定理 4.1 一般の n 次行列 A に対し, A が正則 $\iff \det A \neq 0$. このとき $A^{-1} = \mathrm{Cof}(A)/(\det A)$.

勿論, 上の条件だけで, $\det A$ が一意的 (unique) に決まるかという問題は残る. (もし $\det A$ が unique に決まれば, 0 でないときは, 逆行列は unique なので, $\mathrm{Cof}(A)$ も unique となる. $\det A = 0$ なら $AX = XA = O$ なる X は $X = O$ 以外にもあるのか? あれば, 少なくとも定数倍による違いはあるので, 当然, unique ではなくなる. では定数倍の違いを除けば unique になるのか？という問題がさらに残るが, これらについてはまた後ほど.)

4.2 行列式の定義

一般の正方行列の行列式の定義を与えてしまおう.

定義 4.1 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$ を n 個の n 次数ベクトルとする. これらに対して 1 つのスカラーを与える関数 $\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n)$ が次の 4 つの性質を満たすときこれを正方行列 $A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n)$ の行列式といい, $\det A$ と表す. 但し, c はスカラーで, $1 \leq i \leq n$ として, $\boldsymbol{a}_i'$ も n 次数ベクトル.

(1) $\det(\boldsymbol{a}_1, \dots, c\boldsymbol{a}_i, \dots, \boldsymbol{a}_n) = c\det(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_n)$ (次の (2) と合わせて **多重線形性**という.)

(2) $\det(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{a}_i', \dots, \boldsymbol{a}_n) = \det(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_i, \dots, \boldsymbol{a}_n) + \det(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_i', \dots, \boldsymbol{a}_n)$.

(3) $i \neq j \Longrightarrow \det(\dots, \boldsymbol{a}_i, \dots, \boldsymbol{a}_j, \dots) = -\det(\dots, \boldsymbol{a}_j, \dots, \boldsymbol{a}_i, \dots)$,
つまり 2 つのベクトルを入れ換えると -1 倍になる. (**交代性**)

(4) $\det(\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n) = 1$.

[注] $\det A$ を $|A|$ と表す場合もあるが, 解析などでは, 絶対値との区別がつきにくくなるので, あまり使わない方が良い. しかし, 大きい行列の行列式を計算するときには便利なので, 分野的に混同する恐れがない場合には逆に使った方が良い.

[2 次元, 3 次元の行列式]

このときは既に, 式で定義が与えられているので, 上の定義の性質はみたすのだが (各自確認せよ), 逆に, 上の定義だけから, 式が導けるかを見てみよう.

$A = (a_{ij})_{i,j\leq n}$ の行列式はそれぞれ, $n = 2$ のとき, $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, $n = 3$ のとき, $\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$ であった.

補題 4.1 2 次元実ベクトル空間において, 関数 $f(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ が行列式 $\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ となる $\iff$

(1) $f(c\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = f(\boldsymbol{a}_1, c\boldsymbol{a}_2) = cf(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ ((2) と合わせて**双線形性**という.)

(2) $f(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_1', \boldsymbol{a}_2) = f(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) + f(\boldsymbol{a}_1', \boldsymbol{a}_2)$. $\boldsymbol{a}_2$ についても同様.

(3) $f(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1) = -f(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$. (**交代性**)

(4) $f(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = 1$.

（証明） まず, (3) から $f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0$ となることに注意しておく. なぜなら, 入れ換えるとマイナスがつくが, 元と同じだからである. $\boldsymbol{a}_1 = a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{21}\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{a}_2 = a_{12}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2$ より, (1), (2) の双線形性を 2 回使って, 最後に, 上で注意したことと (4) から,

$$\begin{aligned}
&f(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = a_{11}f(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{a}_2) + a_{21}f(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{a}_2) \\
&= (a_{11} + a_{12})f(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) + (a_{11} + a_{22})f(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) + (a_{21} + a_{12})f(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) + (a_{21} + a_{22})f(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) \\
&= (a_{11} + a_{22})f(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) + (a_{21} + a_{12})f(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) \\
&= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.
\end{aligned}$$

■

補題 4.2 3 次元実ベクトル空間において, 関数 $f(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ が行列式 $\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ となる $\iff$ 一般の行列式の定義で述べた 4 つの性質を f がみたす.

（証明）上と同様で, まず, 行列式の定義 $\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) = (\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_1) = (\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ から 4 つの性質をみたすことは容易に示せる. 逆は, 上と全く同様. 但し, $f(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3) = 0$ のように同じベクトルがあれば 0 ということを用いる. このとき $\boldsymbol{a}_i = a_{1i}\boldsymbol{e}_1 + a_{2i}\boldsymbol{e}_2 + a_{3i}\boldsymbol{e}_3$ と多重線形性から,

$$f(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) = \sum_{(j_1, j_2, j_3) \sim (1,2,3)} a_{j_1 1}a_{j_2 2}a_{j_3 3} \det(\boldsymbol{e}_{j_1}, \boldsymbol{e}_{j_2}, \boldsymbol{e}_{j_3}).$$

$(j_1, j_2, j_3) \sim (1, 2, 3)$ は (j_1, j_2, j_3) が $(1, 2, 3)$ の並べ換えであることを意味する. ■

[n 次元の行列式]

一般の n 次行列 A に対しても, 行列式は, ベクトルの入れ換えで符合が変わるということから, 同じベクトルがあれば, 0 になるので, 上の証明と同じように多重線形性を用いて,

$$\det A = \sum_{(j_1, \ldots, j_n) \sim (1, \ldots, n)} a_{1j_1} \cdots a_{nj_n} \det(\boldsymbol{e}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{j_n}). \tag{4.1}$$

ここで, $(j_1, \ldots, j_n) \sim (1, \ldots, n)$ は $(j_1, \ldots, j_n)$ が $(1, \ldots, n)$ の並べ換えであることを意味する. この並べ換えを**置換 (permutation)** といい, それを $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$ と表し, その全体を S_n とする. またこのとき $j_i = \sigma(i)$ と表す. さらに, 式の最後の, $\boldsymbol{e}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{j_n}$ を 2 つずつ入れ換える**互換**を繰り返すことにより, $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ に変えることができる. その互換の数を m とすれば, $\det(\boldsymbol{e}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{j_n}) = (-1)^m$ となり, この値を σ の**符号 (signature)** といい, $\mathrm{sgn}(\sigma)$ で表す. これにより, 次の定理が得られる.

定理 4.2 n 次行列 $A = (a_{ij})$ に対し,

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \tag{4.2}$$

上で, 置換が, 互換を繰り返すことにより, 元に戻せることは n について帰納的に証明できるが, その互換の仕方が幾通りもあり, その数も一定ではない. そこで, 「果たして置換の符号というものが一定に定まるのか?」という問題が生じる. 勿論, 実際には, 一定となるが, これについては, 次章の最後に述べ, 講義では, もし時間があれば, ということで, 興味のある人は自分で勉強してもらいたい.

問 4.1 $n \geq 2$ のとき, 1 つの置換 $\sigma \in S_n$ が, いくつかの互換によって元に戻せることを帰納法によって示せ.

ちなみに i と j を入れ換える互換は (i,j) と表し, (j,i) としても同じで, そのいくつかの組み合わせは, 例えば, $(1,3)(1,2)$ と表して, **互換の積**という. この例は, 1 と 3 を入れ換えてから, 1 と 2 を入れ換えるので, 結局, $(1,2,3) \to (3,1,2)$ という置換と同じことになる.

実は, (4.1) の式は, すぐには出ない. $\boldsymbol{a}_i = \sum_{j_i=1}^{n} a_{j_i i}\boldsymbol{e}_{j_i}$ に多重線形性を用いると

$$\det(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n) = \sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{n} a_{j_1 1}\cdots a_{j_n n}\det(\boldsymbol{e}_{j_1},\ldots,\boldsymbol{e}_{j_n})$$

となり, さらに同じベクトルがあれば, 0 となることから,

$$\det(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n) = \sum_{(j_1,\ldots,j_n)\sim(1,\ldots,n)} a_{j_1 1}\cdots a_{j_n n}\det(\boldsymbol{e}_{j_1},\ldots,\boldsymbol{e}_{j_n})$$

までは出る. 問題は $a_{j_i i}$ を $a_{i j_i}$ に変えても良いかということであるが, それは可能で, 後で証明する行列式の転置不変性から明らかである. 実際, $j_1,\ldots,j_n$ は $1,\ldots,n$ の並べ換えなので, $a_{j_1 1}\cdots a_{j_n n}$ の順番を入れ換えて, $a_{1k_1}\cdots a_{nk_n}$ とすることはできる. このとき, $(k_1,\ldots,k_n)$ は $(j_1,\ldots,j_n)$ の逆の並べ換え（逆置換）となり, $\det(\boldsymbol{e}_{j_1},\ldots,\boldsymbol{e}_{j_n}) = \det(\boldsymbol{e}_{k_1},\ldots,\boldsymbol{e}_{k_n})$ も成り立つ (詳しくは次章の転置不変性の定理の証明を見て欲しい).

5 行列式の性質 (Properties of determinant)

以下の証明では, 本当は行列式の置換の式を用いた方が, 式も説明も簡単になるのだが, ここでは, できるだけ置換を用いずに, その前の式 (4.1) を用いて行う.

5.1 行列式の一般的性質, 転置行列の行列式, 積の行列式

定理 5.1 n 次行列 A に対し, 次が成立する.

(1) ある列の成分が全て 0 なら $\det A = 0$.

(2) 等しい列があれば, $\det A = 0$.

(3) 他の列のスカラー倍を加えても行列式の値は変わらない.

さらに上の「列」を「行」に変えても同じことが成り立つ.

（証明） (1) $\mathbf{0} = \boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{a}_n$ と線形性より, $\det(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\mathbf{0}) = \det(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n) - \det(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n) = 0$. もしくは $\mathbf{0} = 0\cdot\boldsymbol{a}_n$ とみて 0 倍を出しても良い.

(2) 同じベクトルを入れ換えれば符号が変わるが, 元と同じだから, これは 0 となる.

(3) 線形性と (2) より,

$$\det(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n + c\boldsymbol{a}_1) = \det(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n) + c\det(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_1) = \det(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n).$$

最後の結果は次の定理から成り立つ. ■

定理 5.2 正方行列 A に対し, $\det({}^tA) = \det A$.

（証明） $A = (a_{ij})$ として, ${}^tA = (b_{ij})$ とおくと, $b_{ij} = a_{ji}$.

$$\det({}^tA) = \sum_{(j_1,\dots,j_n)\sim(1,\dots,n)} b_{1j_1}\cdots b_{nj_n}\det(\boldsymbol{e}_{j_1},\dots,\boldsymbol{e}_{j_n}) = \sum a_{j_11}\cdots a_{j_nn}\det(\boldsymbol{e}_{j_1},\dots,\boldsymbol{e}_{j_n}).$$

さらに, 積の順番を入れ換えにより (j_i を小さい順に), $a_{j_11}\cdots a_{j_nn} = a_{1\ell_1}\cdots a_{n\ell_n}$ と表せる. ここで, $(\ell_1,\dots,\ell_n)$ は $(j_1,\dots,j_n)$ の逆の並べ換えである. しかも次が成り立つ.

$$\det(\boldsymbol{e}_{j_1},\dots,\boldsymbol{e}_{j_n}) = \det(\boldsymbol{e}_{\ell_1},\dots,\boldsymbol{e}_{\ell_n}).$$

実際, 2 つのベクトルの入れ換え (互換) を繰り返すことにより, $(\boldsymbol{e}_{j_1},\dots,\boldsymbol{e}_{j_n})$ を $(\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n)$ に変える変換と全く逆の入れ換えを行うことにより, $(\boldsymbol{e}_{\ell_1},\dots,\boldsymbol{e}_{\ell_n})$ が $(\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n)$ に変わるので, これらの行列式は同じ値 $(-1)^m$ (m は互換の数) になる. ■

定理 5.3 n 次行列 A, B に対し, $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.

（証明）$B = (\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_n)$ として, $AB = (A\boldsymbol{b}_1,\dots,A\boldsymbol{b}_n)$ に注意して,

$$f(\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_n) = f(B) := \det(AB) = \det(A\boldsymbol{b}_1,\dots,A\boldsymbol{b}_n)$$

とおき, $(\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_n)$ の関数としてみる. $A(c\boldsymbol{b}_i) = cA\boldsymbol{b}_i, A(\boldsymbol{b}_i+\boldsymbol{b}_j) = A\boldsymbol{b}_i + A\boldsymbol{b}_j$ から f は多重線形性をみたす. また 2 つのベクトルの入れ換えで符合が変わる. よって, 行列式と同じように, 同じベクトルがあれば $=0$ になる. これらのことから

$$f(\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_n) = \sum_{(j_1,\dots,j_n)\sim(1,\dots,n)} b_{1j_1}\cdots b_{nj_n} f(\boldsymbol{e}_{j_1},\dots,\boldsymbol{e}_{j_n}).$$

$\boldsymbol{e}_{j_1},\dots,\boldsymbol{e}_{j_n}$ を 2 つずつ入れ換える互換によって, $\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n$ に変えることができる. その変換によって $f(\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n)$ につく符号は, 丁度, $\det(\boldsymbol{e}_{j_1},\dots,\boldsymbol{e}_{j_n})$ の値と同じになる (実際, その互換の数を m とすると, どちらも $(-1)^m$ となる). 従って,

$$f(\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_n) = \sum_{(j_1,\dots,j_n)\sim(1,\dots,n)} b_{1j_1}\cdots b_{nj_n}\det(\boldsymbol{e}_{j_1},\dots,\boldsymbol{e}_{j_n}) f(\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n).$$

定義より, $f(\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n) = f(E) = \det A$ なので, 上の式は $(\det B)(\det A)$ となる. ■

系 5.1 正方行列 A が正則なら, $\det A \neq 0$ で, $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

$AA^{-1} = E$ の行列式を考えれば, 上の定理より, 明らか.

5.2 余因子展開

n 次行列 A の第 k 行と第 ℓ 列を取り除いた $(n-1)$ 次行列を $A_{k\ell}$ と表し, A の**小行列**という.

補題 5.1 次の n 次行列 A に対し, $\det A = \det A_{11}$ が成り立つ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & A_{11} & \\ a_{n1} & & & \end{pmatrix}$$

（証明）$A=(a_{ij})$ とすると, A_{11} の (i,j) 成分は $a_{i+1,j+1}$ なので,

$$\det A_{11} = \sum_{(j_2,\dots,j_n)\sim(2,\dots,n)} a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}\det(\boldsymbol{e}_{j_2},\dots,\boldsymbol{e}_{j_n}).$$

一方,

$$\det A = \sum_{(j_1,j_2,\dots,j_n)\sim(1,2,\dots,n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}\det(\boldsymbol{e}_{j_1},\boldsymbol{e}_{j_2},\dots,\boldsymbol{e}_{j_n})$$

において, $j_1\ge 2$ なら $a_{1j_1}=0$ なので, $j_1=1$ の和だけが残り, さらに $a_{11}=1$ なので,

$$\det A = \sum_{(j_2,\dots,j_n)\sim(2,\dots,n)} a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}\det(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_{j_2},\dots,\boldsymbol{e}_{j_n})$$

ここで $\det(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_{j_2},\dots,\boldsymbol{e}_{j_n})=\det(\boldsymbol{e}_{j_2},\dots,\boldsymbol{e}_{j_n})$ なので, 題意を得る. ■

系 5.2 n 次行列 A の第 k 行が $(0,\dots,1,0,\dots,0)$ (第 ℓ 成分が 1) なら, $\det A=(-1)^{k+\ell}\det A_{k\ell}$.

（証明）第 k 行を前の行と順に入れ換えて行って, 第 1 行にまで持って行くと, $(-1)^{k-1}$ 倍がつく. 同様に, 第 ℓ 列を第 1 列に持って行くと, さらに $(-1)^{\ell-1}$ 倍がつく. 従って, $(-1)^{k+\ell-2}=(-1)^{k+\ell}$ 倍となる. ■

定義 5.1 n 次行列 A と $1\le i,j\le n$ に対し, $\Delta(A)_{ij}=(-1)^{i+j}\det A_{ij}$ とおいて, A の (i,j) **余因子 (cofactor)** という.

定理 5.4 (第 i 行についての余因子展開) n 次行列 A と $1\le i\le n$ に対し,

$$\det A = a_{i1}\Delta(A)_{i1}+a_{i2}\Delta(A)_{i2}+\cdots+a_{in}\Delta(A)_{in}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\Delta(A)_{ik}.$$

定理 5.5 (第 j 列についての余因子展開) n 次行列 A と $1\le j\le n$ に対し,

$$\det A = a_{1j}\Delta(A)_{1j}+a_{2j}\Delta(A)_{2j}+\cdots+a_{nj}\Delta(A)_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}\Delta(A)_{kj}.$$

例題 5.1 A が **上三角行列** (i.e., $i>j\Rightarrow a_{ij}=0$, 対角成分より下が全て 0) なら, $\det A=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ となることを示せ.

転置をして下三角にすれば, 補題 5.1 より, 明らか.

5.3 逆行列, いろいろな行列式の計算

定義 5.2 n 次行列 A の**余因子行列 (cofactor matrix)** $\widetilde{A}=\mathrm{Cof}(A)$ はその (i,j) 成分が余因子 $\Delta(A)_{ji}$ であるような行列として定義. 即ち, $\widetilde{A}=\mathrm{Cof}(A)={}^t(\Delta(A)_{ij})={}^t((-1)^{i+j}\det A_{ij})$.

定理 5.6 n 次行列 A に対し, $\widetilde{A}=\mathrm{Cof}(A)$ として, $A\widetilde{A}=\widetilde{A}A=(\det A)E$.

（証明）$A=(a_{ij})$ として,

$$(A\widetilde{A})_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\widetilde{A}_{kj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\Delta(A)_{jk}=(\det A)\delta_{ij}.$$

実際, $i=j$ なら, 行についての余因子展開から $\det A$ と等しく, $i\neq j$ なら, A の第 j 行を第 i 行の成分で置き換えた行列 A' の第 j 行についての余因子展開となり, $\det A'$ に等しいが, A' は第 i 行と第 j 行が同じなので, $\det A'=0$ となる. 同様に, 列についての余因子展開を用いて, $(\widetilde{A}A)_{ij}=(\det A)\delta_{ij}$ を得るので, 結局, $A\widetilde{A}=\widetilde{A}A=(\det A)E$ が成り立つ. ■

定理 5.7 n 次行列 A に対し, A が正則 $\iff$ $\det A\neq 0$. このとき $A^{-1}=\mathrm{Cof}(A)/(\det A)$.

証明は, 正則なら $\det A\neq 0$ については既に示した (行列式の積を用いた). 他は簡単に示せる (2 次のときと同様).

例題 5.2 n 次行列 A の逆行列の定義は, $AX=XA=E$ なる n 次行列 X だったが, 実は, 一方のみの $AX=E$ または $XA=E$ が成り立てば, A は正則で, $A^{-1}=X$ となることを証明せよ.

定理 5.8 (Vandermonde (ヴァンデルモンド) の行列式)

$$\det\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&\cdots&x_n\\x_1^2&x_2^2&\cdots&x_n^2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{pmatrix}=\prod_{i<j}(x_j-x_i).\quad (x_i \text{ が全て異なれば, この行列は正則.})$$

（証明）与えられた行列式を $f(x_1,\dots,x_n)$ とおくと, $x_1,\dots,x_n$ の多項式で, $1\leq i<j\leq n$ に対し, x_j を x_i に変えると, 第 i 列と第 j 列が同じになるので, f の値は 0 になる. 従って, f は x_i-x_j で割り切れる. これから, $^\exists g(x_1,\dots,x_n)$: 多項式; $f(x_1,\dots,x_n)=g(x_1,\dots,x_n)\prod_{i<j}(x_j-x_i)$. ここで, x_1 についての次数をみる. 第 1 列についての余因子展開を考えれば, $\deg_{x_1}f=n-1=\deg_{x_1}\prod_{i<j}(x_j-x_i)$ なので, $\deg_{x_1}g=0$ となる. 他の変数についても同様なので, 結局, $g\equiv c$ 定数のみとなる. 次に $x_1^0x_2^1\cdots x_n^{n-1}$ の係数を調べる. 余因子展開を順に考えていけば, f の方の係数は 1 であることが分かる. また $\prod_{i<j}(x_j-x_i)$ の方は, $(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})\cdot(x_{n-1}-x_1)(x_{n-1}-x_2)\cdots(x_{n-1}-x_{n-2})\cdots(x_3-x_1)(x_3-x_2)\cdot(x_2-x_1)$ の展開にのみ現れ, しかも係数はやはり 1 となる. 以上から $g\equiv 1$ となり, 求める結果を得る. ■

例題 5.3 (巡回行列式)

$$\det\begin{pmatrix}x_1&x_2&\cdots&x_n\\x_n&x_1&\cdots&x_{n-1}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\x_2&x_3&\cdots&x_1\end{pmatrix}=\prod_{\zeta\in\mathbb{C};\zeta^n=1}(x_1+\zeta x_2+\cdots+\zeta^{n-1}x_n).$$

[解] $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ を 1 の n 乗根として, これによる Vandermonde の行列式との積を考える.

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_n & x_1 & \cdots & x_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \cdots & \zeta_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_1^{n-1} & \zeta_2^{n-1} & \cdots & \zeta_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1+\zeta_1 x_2+\cdots+\zeta_1^{n-1}x_n & \cdots & x_1+\zeta_n x_2+\cdots+\zeta_n^{n-1}x_n \\ x_n+\zeta_1 x_1+\cdots+\zeta_1^{n-1}x_{n-1} & \cdots & x_n+\zeta_n x_1+\cdots+\zeta_n^{n-1}x_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2+\zeta_1 x_3+\cdots+\zeta_1^{n-1}x_1 & \cdots & x_2+\zeta_n x_3+\cdots+\zeta_n^{n-1}x_1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1+\zeta_1 x_2+\cdots+\zeta_1^{n-1}x_n & \cdots & x_1+\zeta_n x_2+\cdots+\zeta_n^{n-1}x_n \\ \zeta_1(x_1+\zeta_1 x_2+\cdots+\zeta_1^{n-1}x_n) & \cdots & \zeta_n(x_1+\zeta_n x_2+\cdots+\zeta_n^{n-1}x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_1^{n-1}(x_1+\zeta_1 x_2+\cdots+\zeta_1^{n-1}x_n) & \cdots & \zeta_n^{n-1}(x_1+\zeta_n x_2+\cdots+\zeta_n^{n-1}x_n) \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{i=1}^{n}(x_1+\zeta_i x_2+\cdots+\zeta_i^{n-1}x_n) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \cdots & \zeta_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_1^{n-1} & \zeta_2^{n-1} & \cdots & \zeta_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

この Vandermonde の行列式は 0 ではないので, 題意を得る. ■

例題 5.4 次の行列式を求めよ.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & c & \cdots & c \\ c & 1 & \cdots & c \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & \cdots & 1 \end{pmatrix} : \quad (対角成分が 1 で他は, 全て c).$$

[解] $\zeta \in \mathbb{C}; |\zeta| = 1$ として, $\zeta \neq 1$ のときは $1+\zeta+\zeta^2+\cdots+\zeta^{n-1} = 0$ より, $1+\zeta c+\zeta^2 c+\cdots+\zeta^{n-1}c = (1-c)+c(1+\zeta+\zeta^2+\cdots+\zeta^{n-1}) = 1-c$ となることに注意して, 巡回行列式の結果を用いれば $\{1+(n-1)c\}(1-c)^{n-1}$ を得る. ■

5.4 置換

置換とは n 個の並んだものを並べ換える操作のことをいうが, 数学的には次のように定義される.

$J_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ として, 写像 $\sigma : J_n \to J_n$ が**置換 (permutation)** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ σ が J_n 上の全単射, i.e., $i \neq j$ なら $\sigma(i) \neq \sigma(j)$. これを $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$ と表す. ここで $j_i = \sigma(i)$ である. この全体を S_n として, n **次対称群 (n-dimensional symmetric group)** という. また $^\forall i \in J_n, \sigma(i) = i$ なるものを恒等置換といい, id と表す. $\sigma \in S_n$ の逆写像を**逆置換**といい, σ^{-1} で表す. 2 つの置換 $\sigma, \tau \in S_n$ に対し, **積** $\sigma\tau \in S_n$ を $(\sigma\tau)(i) = \sigma(\tau(i))$ で定義する (即ち, $\sigma\tau = \sigma \circ \tau$; 積 = 写像の合成). 一般に, $\sigma\tau$ と $\tau\sigma$ は等しいとは限らない. また $i, j \in J_n; i \neq j$ に対し, i と j のみを入れ換える置換を**互換 (transposition)** といい, 特に (i, j) or (j, i) と表す.

前に問として述べたが, 帰納法により, 次の定理が成り立つ.

定理 5.9 $n \geq 2$ のとき, 任意の置換 $\sigma \in S_n$ はいくつかの互換の積で表せる.

定義 5.3 $\sigma \in S_n$ に対し, $m = \sharp\{(i,j); 1 \le i < j \le n, \sigma(i) > \sigma(j)\}$: 大小が逆転する数字の組 (i,j) の個数を σ の**反転数**といい, さらに $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^m$ を σ の**符合 (signature)** という.

定義 5.4 $n \ge 2$ に対し, 変数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ の多項式 $\Delta_n = \displaystyle\prod_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j)$ を $x_1, x_2, \dots, x_n$ の**差積**という. また $\sigma \in S_n$ に対し, $\sigma(\Delta_n) = \displaystyle\prod_{1 \le i < j \le n} (x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)})$.

定理 5.10 (1) $\sigma(\Delta_n) = \mathrm{sgn}(\sigma)\Delta_n$ (2) $(\sigma\tau)(\Delta_n) = \sigma(\tau(\Delta_n))$ (3) $\mathrm{sgn}(\sigma\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\tau)$.

（証明）(1) 定義から集合として $\{\{i,j\}; 1 \le i < j \le n\} = \{\{\sigma(i), \sigma(j)\}; 1 \le i < j \le n\}$ なので, Δ_n と $\sigma(\Delta_n)$ の違いは, 変数の引く順の違いだけである. 即ち, それは $i < j$ に対し, $\sigma(i) > \sigma(j)$ のときの項 $x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}$ の違いだけである. その数は σ の反転数 m そのものなので, 求める式を得る. (この結果から, 逆にこの式によって, 符号 $\mathrm{sgn}(\sigma)$ を定義しても良い.) (2) は積 $\sigma\tau$ と $\sigma(\Delta_n)$ の定義から明らか. (3) は (1), (2) からすぐ分かる. 実際, $\mathrm{sgn}(\sigma\tau)\Delta_n = (\sigma\tau)(\Delta_n) = \sigma(\tau(\Delta_n)) = \mathrm{sgn}(\sigma)\tau(\Delta_n) = \mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\tau)\Delta_n$. ■

定理 5.11 $\sigma \in S_n$ が互換の積で表されているとき, $\sigma = \tau_1\tau_2\cdots\tau_m$ (τ_i は互換) なら $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^m$. つまり置換を互換の積で表したとき, その表し方によらず, その個数の偶奇性は一定である.

（証明）上の定理の (3) から $\mathrm{sgn}(\sigma) = \mathrm{sgn}(\tau_1)\cdots\mathrm{sgn}(\tau_m) = (-1)^m$. また, $\sigma = \tau_1'\tau_2'\cdots\tau_\ell'$ (τ_i' は互換) と表されたとすると, $(-1)^m = \mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^\ell$ となり, m, ℓ の偶奇性は一致する. ■

この定理により, $\sigma \in S_n$ を $\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$ のとき, **偶置換**, $\mathrm{sgn}(\sigma) = -1$ のとき, **奇置換**という. 特に, 互換 (i,j) $(i \ne j)$ は奇置換である.

定理 5.12 置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$ に対し, $\det(\boldsymbol{e}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{e}_{i_n}) = \mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma)$.

（証明）まず $1 = \mathrm{sgn}(id) = \mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\sigma^{-1})$ より, $\mathrm{sgn}(\sigma) = \mathrm{sgn}(\sigma^{-1})$. さらに $\sigma^{-1} = \tau_1\tau_2\cdots\tau_m$ (τ_i は互換) と表すと, 行列式は 2 つのベクトルの入れ換えで (-1) 倍となるので, $\det(\boldsymbol{e}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{e}_{i_n}) = (-1)^m \det(\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n) = (-1)^m = \mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma)$. ■

6 掃き出し法 (Sweeping out method)

6.1 連立一次方程式の計算，逆行列の計算

[行基本変形] 次のような連立方程式を考える.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

これを解くとき, 次のような変形を行うことにより, 解が求まる.

(1) ある式の定数倍を他の行に加える. (2) 式を入れ換える. (3) 式を 0 以外で定数倍する.

そこで, 対応する行列を

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

として, 次の操作を考える.

(1) ある行の定数倍を他の行に加える. (2) 行を入れ換える. (3) 行を 0 以外で定数倍する.

この操作を **行基本変形** という.

[掃き出し法] 行基本変形により, 上の行列が

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & & O & c_{1r+1} & \cdots & c_{1n} & & d_1 \\ & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ O & & 1 & c_{rr+1} & \cdots & c_{rn} & & d_r \\ & O & & & O & & & \mathbf{0} \end{array}\right)$$

という形になれば, 解は次で与えられる.

$$\begin{cases} x_1 = -c_{1r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{1n}x_n + d_1 \\ \qquad\qquad \vdots \\ x_r = -c_{rr+1}x_{r+1} - \cdots - c_{rn}x_n + d_r \\ x_{r+1}, \dots, x_n \quad \text{は不定（任意定数）} \end{cases}$$

このやり方を**掃き出し法**という.

[逆行列の計算] 連立方程式を解くのと同じ考え方で, 逆行列を求めることもできる.

n 次行列 A に対し, $AX = E$ なる n 次行列 $X = (\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n)$ を求めることは, 連立方程式 $A\boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{e}_j$ をとくことと同じである. 従って, $n \times 2n$ 行列 $(A \mid E)$ が行基本変形で $(E \mid X)$ という形になったとすると, この X が A の逆行列, i.e, $X = A^{-1}$ となる.

またもし, A の部分が E に変形できないときは, A は逆行列を持たないということになる.

6.2 行列のランクの計算，基本行列

行基本変形と同様に列に対しても, 次の操作が考えられる.

(1) ある列の定数倍を他の行に加える. (2) 列を入れ換える. (3) 列を 0 以外で定数倍する.

この操作を **列基本変形** といい, 行のと合わせて, **基本変形**という.

定理 6.1 任意の $m \times n$ 行列 A に, 基本変形を何度か施すことにより, $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ の形にすることができる.

（証明） まず $A = O$ なら明らかなので, $A \neq O$ とする. 行, または, 列の入れ換えにより, $a_{11} \neq 0$ とできる. 第 1 行を $1/a_{11}$ 倍して, (1,1) 成分を 1 にすれば, 第 1 行を何倍かして, 他の行から引けば, 第 1 列の他の成分は全て 0 にできる. 同様に列への操作で, 第 1 行の他の成分も全て 0 にできる. 後は同様にして行けば, 0 でない成分がある限りは, 上の操作を続け, 残りが全て 0 になればそこで終わるので, 求める結果を得る. ■

上の定理で実は, r の一意性も成り立つのだが, その証明は, ここではまだできない. 7 章, 8 章 (次の章とその次) の抽象的なベクトル空間の基底や次元, さらに線形写像の次元定理や階数の概念を必要とする. ただ, それを認めれば, 次の定義ができる.

定義 6.1 $m \times n$ 行列 A が基本変形により, $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ の形に変形できるとき, r を A の**階数 (rank)** といい, rank A と表す.

明らかに rank $A \leq m \wedge n = \min\{m, n\}$.

[基本行列]

定義 6.2 次の 3 つの n 次行列を n **次基本行列**という.
(1) $P(i,j;c)$ は単位行列 E_n の (i,j) 成分を 0 から c に変えたもの. $(i \neq j)$
(2) $Q(i,j)$ は単位行列 E_n の第 i 行と第 j 行を入れ換えたもの.
(3) $R(i;c)$ は単位行列 E_n の (i,i) 成分の 1 を c に変えたもの. $(c \neq 0)$

$$P(i,j;c) = E_n + cE_{ij},\ Q(i,j) = (E_n - E_{ii} - E_{jj}) + E_{ij} + E_{ji},\ R(i;c) = (E_n - E_{ii}) + cE_{ii}.$$

明らかなこととして, $m \times n$ 行列 A に対し, 行基本変形＝左から m 次基本行列をかけること, 列基本変形＝右から n 次基本行列をかけることで, 実際,
$P(i,j;c)A$: A の第 i 行 $+c$ 第 j 行,
$Q(i,j)A$: A の第 i 行 $\leftrightarrow$ 第 j 行,
$R(i;c)A$: A の第 i 行 $\times c$.
となり, 逆も列に対し, 同様である.

例題 6.1 基本行列 $P(i,j;c)$, $Q(i,j)$, $R(i;c)$ が正則であることを示せ.

$P(i,j;-c)$, $Q(i,j)$, $R(i;1/c)$ が逆行列となる. 例えば,

$$\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を計算してみれば良い.

定理 6.2 任意の $m\times n$ 行列 A に対し, $^\exists Q$: m 次正則行列, $^\exists P$: n 次正則行列; $QAP = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ の形にすることができる.

(証明) 実際, 左から基本行列のいくつかを施すことにより, それを Q とすれば, m 次正則行列で, $QA = \begin{pmatrix} E_r & * \\ O & O \end{pmatrix}$ となり, さらに右から基本行列のいくつかを施すことにより, それを P とすれば, n 次正則行列で, $QAP = \begin{pmatrix} E_r & * \\ O & O \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$. ■

定理 6.3 n 次行列 A が正則 $\iff$ $\mathrm{rank}\ A = n$.

(証明) A が正則なら, 前節の逆行列の計算から, $(A \mid E)$ が行基本変形で $(E \mid A^{-1})$ にできる. 従って, $\mathrm{rank}\ (A) = n$. 逆は, 上の定理から明らか. 実際, $\mathrm{rank}\ (A) = n$ なら $^\exists P, Q$: 正則; $QAP = E$ で, $A = Q^{-1}P^{-1}$ となり, これは正則. ■

[一般逆行列の計算]

定理 6.4 A を $m \times n$ 行列として, $(m+n)\times(m+n)$ 行列 $\left(\begin{array}{c|c} A & E_m \\ \hline E_n & O \end{array}\right)$ は最初の m 行への行基本変形と, 最初の n 列への列基本変形によって, $\left(\begin{array}{c|c} F & Q \\ \hline P & O \end{array}\right)$ とできる. ここで, $F = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ $(r = \mathrm{rank}\ A)$. このとき, $QAP = F$ が成り立つ.

(証明) まず, 基本変形の定理から, $^\exists Q$: m 次正則行列, $^\exists P$: n 次正則行列; $QAP = F$ とできる. そこで,

$$\left(\begin{array}{c|c} Q & O \\ \hline O & E_n \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A & E_m \\ \hline E_n & O \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} P & O \\ \hline O & E_n \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} QA & Q \\ \hline E_n & O \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} P & O \\ \hline O & E_n \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} QAP & Q \\ \hline P & O \end{array}\right).$$

最初の行列が, 最初の m 行への基本変形で, 3 つ目の行列が, 最初の n 列への基本変形であることは明らかで, これから題意を満たすことが分かる. ■

定理 6.5 上の定理において, $X = P{}^tFQ$ とおくと, $AXA = A$ をみたす.

(証明) まず, $F{}^tFF = F$ となることに注意しておく. $AP = Q^{-1}F, QA = FP^{-1}$ を用いて, $AXA = A(P{}^tFQ)A = (AP){}^tF(QA) = (Q^{-1}F){}^tF(FP^{-1}) = Q^{-1}(F{}^tFF)P^{-1} = Q^{-1}FP^{-1} = A$. ■

定義 6.3 $m \times n$ 行列 A に対して, $n \times m$ 行列 X が $AXA = A$ をみたすとき, X を A の**一般逆行列**といい, A^- と表す.

上の定理から, これはいつでも存在し, しかも, 次のことから, 逆行列の一般化であることも分かる.

系 6.1 A が正則なら, $A^- = A^{-1}$.

7 ベクトル空間 (Vector spaces)

7.1 抽象ベクトル空間の定義，一次独立性

抽象ベクトル空間の定義については一番, 最初に述べたが, 要は, ある集合で, 和とスカラー倍が定義されて, 普通の計算ができるというものである. このとき, スカラーの全体は四則演算に関して閉じている「体」と呼ばれるもので, 普通は $K=\mathbb{R},\mathbb{C}$ で, 場合によっては $\mathbb{Q}$ をとることもある. 簡単に係数空間, もしくは, スカラー空間と呼ぶこともある.)

前に述べたように, $\mathbb{R}^n$ は係数空間（スカラー）を $K=\mathbb{R}$ とすれば, $\mathbb{R}$ ベクトル空間だが, $K=\mathbb{Q}$ とすれば, $\mathbb{Q}$ ベクトル空間. 同様に $\mathbb{C}^n$ は $K=\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}$ に応じて, $\mathbb{C}$ ベクトル空間, $\mathbb{R}$ ベクトル空間, $\mathbb{Q}$ ベクトル空間となり, これらは全てベクトル空間としてはまったく別のものである.

例 7.1 他のベクトル空間とそうでない例をいくつか挙げる.

(1) 実 $m\times n$ 行列全体 $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}$ ベクトル空間, 複素 $m\times n$ 行列全体 $M_{m\times n}(\mathbb{C})$ は $\mathbb{C}$ ベクトル空間.

(2) 実係数の x の多項式全体 $\mathbb{R}[x]$ とその中の次数が n 以下の全体 $\mathbb{R}[x]_{\le n}$ は $\mathbb{R}$ ベクトル空間, 複素係数の多項式についても同様で, $\mathbb{C}[x],\mathbb{C}[x]_{\le n}$ は $\mathbb{C}$ ベクトル空間.

(3) 区間 $I\subset\mathbb{R}$ 上の実数値 k 回連続的微分可能関数の全体 $C^k(I)$ は $\mathbb{R}$ ベクトル空間,

(4) $[0,\infty)$ は和とスカラー倍は定義できるが, マイナス元が存在しないので, 明らかにベクトル空間ではない.

以下では V を K ベクトル空間とする.

[一次独立性]
この定義も既に数ベクトル空間でしたものと同じだが, もう一度, 簡単に述べる.

定義 7.1 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_m\in V$ が**一次独立 (linear independent)** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $c_1,c_2,\dots,c_m\in K$ に対し, **一次結合** $\displaystyle\sum_{i=1}^m c_i\boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{0}$ なら $c_i=0$ $(i=1,2,\dots,m)$.

そうでないとき, **一次従属 (linear dependent)** であるという. つまり, $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_m\in V$ が一次従属 $\overset{\text{def}}{\iff}$ $^\exists i; c_i\ne 0; \displaystyle\sum_{i=1}^m c_i\boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{0}$.

補題 7.1 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_m\in V$ が一次独立なら, $1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le m$ に対し, その部分系 $\boldsymbol{a}_{i_1},\boldsymbol{a}_{i_2},\dots,\boldsymbol{a}_{i_k}$ も一次独立. 逆に $\boldsymbol{a}_{i_1},\boldsymbol{a}_{i_2},\dots,\boldsymbol{a}_{i_k}$ が一次従属なら $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_m$ も一次従属.

（証明）$\sum_{j=1}^k c_{i_j}\boldsymbol{a}_{i_j}=\boldsymbol{0}$ とすると, 他の係数を 0 として加えることにより, $\sum_{i=1}^m c_i\boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{0}$ とできる. $\{a_i\}$ の一次独立性から $c_i=0$ $(^\forall i)$ となり, 結局, $c_{i_j}=0$ $(^\forall j)$ を得る. ■

補題 7.2 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_m\in V$ が一次独立で, $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{a}_{m+1}\in V$ が一次従属なら, $\boldsymbol{a}_{m+1}$ は $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_m$ の一次結合で表せる, i.e., $^\exists\{c_i\};\boldsymbol{a}_{m+1}=\displaystyle\sum_{i=1}^n c_i\boldsymbol{a}_i$.

（証明）$\sum_{i=1}^{m+1} c_i\boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{0}$ とする. $c_{m+1}\ne 0$ なら明らか. もし $c_{m+1}=0$ なら, 一次従属性から, $^\exists i\le m; c_i\ne 0; \sum_{i=1}^m c_i\boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{0}$. となり, これは $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_m$ の一次独立性に反する. ■

7.2 部分空間

本節では V を K ベクトル空間とする.

定義 7.2 W が K ベクトル空間 V の**部分空間 (subspace)** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ W は V の部分集合で, 和とスカラー倍について閉じている, i.e., $W \subset V$, ${}^\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in W, {}^\forall \alpha \in K, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \in W, \alpha\boldsymbol{a} \in W$.

例題 7.1 K ベクトル空間 V の 2 つの部分空間 W, W' に対し,
(1) $W \cap W'$ も V の部分空間となることを示せ.
(2) $W \cup W'$ は必ずしも V の部分空間となるとは限らない. その例を挙げよ.

(解) (1) は共通集合の定義から, 明らか. (2) は, 例えば, $V = \mathbb{R}^2$: 実ベクトル空間で, x_1 軸, x_2 軸をそれぞれ W, W' とすれば良い, i.e., $W = \mathbf{L}(\boldsymbol{e}_1) = \{x_2 = 0\}$, $W' = \mathbf{L}(\boldsymbol{e}_2) = \{x_1 = 0\}$. ■

定義 7.3 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r \in V$ に対し, その一次結合の全体を

$$\mathbf{L}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r) = \left\{ \sum_{i=1}^{r} c_i \boldsymbol{a}_i ; c_i \in K \ (i = 1, \ldots, r) \right\}$$

とおく. 即ち, $\boldsymbol{x} \in \mathbf{L}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} {}^\exists\{c_i\} \subset K; \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^n c_i \boldsymbol{a}_i$. これは明らかに V の部分空間となる (確かめよ). $W = \mathbf{L}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r)$ を $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r\}$ によって**生成された部分空間**, または, **張られた部分空間**といい, $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r\}$ をその部分空間 W の**生成系**という. 特に $V = \mathbf{L}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r)$ のとき, $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r\}$ を V の**生成系**という.
ちなみに $\mathbf{L}(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r) = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r \rangle$ と表す場合もある

以下では部分空間 $W = \mathbf{L}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r)$ の生成系として一次独立なものがとれ, しかもその個数が一定で, さらに同じ個数の一次独立な別のベクトルで置き換えられることを示す.

例題 7.2 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m \in V$ が一次独立で, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{a}_{m+1} \in V$ が一次従属なら, $\mathbf{L}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m) = \mathbf{L}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{a}_{m+1})$.

(解) 前の補題から, $\boldsymbol{a}_{m+1}$ は $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ の一次結合で表せることから明らか. 実際, $\boldsymbol{a}_{m+1} \in \mathbf{L}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m)$ となり, $\mathbf{L}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{a}_{m+1}) \subset \mathbf{L}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m)$. 逆は明らか. ■

補題 7.3 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m \in V$ を一次独立とする. ${}^\forall \boldsymbol{x} \in V$ に対し, $\boldsymbol{x} \in \mathbf{L}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m)$ なら, $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{x}$ は一次従属で, $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ の一次結合で一意的に表現される. また $\boldsymbol{x} \notin \mathbf{L}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m)$ なら, $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{x}$ は一次独立となる.

(証明) $\boldsymbol{x} \in \mathbf{L}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m)$ のときは $\boldsymbol{x}$ の表現の一意性を示せば良いが, それは $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ の一次独立性から容易に分かる. また $\boldsymbol{x} \notin \mathbf{L}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m)$ のとき, もし $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{x}$ が一次従属なら, $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ の一次結合で表されるので, 仮定に反する. ■

定理 7.1 (取り換え定理) K ベクトル空間 V の部分空間 $W = \mathbf{L}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m)$ において, $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_r \in W$ $(r \leq m)$ を一次独立とする. このとき $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ の内, 適当な r 個を一次独立な $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_r \in W$ で置き換えて, それらを W の生成系とすることができる. つまり, ${}^\exists 1 \leq i_{r+1} < \cdots < i_m \leq m; W = \mathbf{L}(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_r, \boldsymbol{a}_{i_{r+1}}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_m})$.

（証明）一次独立性から, $\boldsymbol{b}_i \neq \mathbf{0}$ $(i = 1, \ldots, r)$. まず $r = 1$ のとき, $\boldsymbol{b}_1 \in W$ から, $\boldsymbol{b}_1 = \sum_{i=1}^m c_i \boldsymbol{a}_i$ で, $^\exists j; c_j \neq 0$. 従って, $\boldsymbol{a}_j =$ の式に直せるので, 生成系として $\boldsymbol{a}_j$ を $\boldsymbol{b}_1$ に置き換えることができる. 次に $r \geq 2$ で, $r-1$ 個の時に成り立つとして, r 個でも成り立つことを示す. $b_r \in W = \mathbf{L}(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_{r-1}, \boldsymbol{a}_{i_r}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_m})$ から $b_r = \sum_{j=1}^{r-1} c_j \boldsymbol{b}_j + \sum_{k=r}^m d_k \boldsymbol{a}_{i_k}$. このとき, $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_r$ の一次独立性から d_k の中に 1 つは 0 でないものがある. 番号を付け替えることにより, $d_r \neq 0$ として良い. 従って, 生成系としてこれに対応する $\boldsymbol{a}_{i_r}$ を $\boldsymbol{b}_r$ で置き換えることができるので, 結局, r 個のときにも成り立つ. ■

系 7.1 K ベクトル空間 V の部分空間 $W = \mathbf{L}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m)$ に m 個より多くの一次独立なベクトルは存在しない.

（証明）$n > m$ として $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n \in W$ を一次独立とする. $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m$ も一次独立なので, 上の定理から, $W = \mathbf{L}(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m)$. しかし $\boldsymbol{b}_n \in W$ なので, 一次独立性に反する. 従って, $n \leq m$. ■

これから次がすぐに分かる.

系 7.2 K ベクトル空間 V の部分空間が $W = \mathbf{L}(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m) = \mathbf{L}(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ と表されていて, $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ も $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ も一次独立なら, $m = n$.

7.3 基底と次元

本節では V を K ベクトル空間とする.

定義 7.4 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\} \subset V$ が V の**基底 (basis)** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \in V$ が一次独立で, $V = \mathbf{L}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$. 即ち, V の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n$ と表される.

前節の結果から次が分かる.

定理 7.2 V に有限個の基底が存在すれば, その数は一定, i.e., $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m\}$ と $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ が V の基底なら, $m = n$.

定義 7.5 V に n 個の基底が存在するとき, この n を V の**次元 (dimension)** といい, $\dim V = \dim_K V = n$ と表す. また, このとき, V を n **次元** K **ベクトル空間**ともいう.

$$\begin{aligned}\dim_K V = n \overset{\text{def}}{\iff} & \ ^\exists\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}\text{: basis, i.e., } \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\text{: lin, indep. かつ } \mathbf{L}(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = V. \\ \iff & \ ^\exists \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\text{: lin, indep. かつ } ^\forall \boldsymbol{x} \in V, ^\exists\{c_i\}; \boldsymbol{x} = \textstyle\sum c_i \boldsymbol{a}_i.\end{aligned}$$

例 7.2 数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n.\mathbb{C}^n$ は基本ベクトル $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ を基底として持つので, n 次元である.
$M_{m\times n}(\mathbb{R})$ は行列単位 $\{E_{ij}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ が基底となるので, mn 次元.
$\mathbb{R}[x]_{\leq n}$ は $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ を基底として持つので $n+1$ 次元.
しかし $\mathbb{R}[x]$ の基底は $\{1, x, x^2, \ldots\}$ と無限個必要で, このとき**無限次元**であるという.

定理 7.3 V を有限次元 K ベクトル空間とする.

(1) 一次独立なベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r \in V$ に適当なベクトルをいくつか加えることにより, $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{a}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ を V の基底にできる.（これを **基底の延長定理**という.）

(2) V が n 次元なら一次独立な n 個のベクトル $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ は V の基底となる.

(3) W が V の部分空間なら $\dim W \leq \dim V$.

(4) W が V の部分空間で, $\dim W = \dim V$ なら, $W = V$.

（証明）(1) $\mathbf{L}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r) = V$ ならそれで成り立っている. $\mathbf{L}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r) \neq V$ なら $\boldsymbol{a}_{r+1} \in V \setminus \mathbf{L}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r)$ をとれば, 補題 7.3 より, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{a}_{r+1}$ が一次独立となる. これを繰り返せば, V が有限次元なので, 題意が示される.

(2) 前節の取り換え定理より明らか.

(3) は (1) より明らか.

(4) は (2) から明らか. ■

7.4 基底変換，数ベクトル空間の基底

n 次元ベクトル空間 V に 2 組の基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}, \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ が与えられているとする. 各 $1 \leq j \leq n$ に対し,

$$\exists \boldsymbol{p}_j = {}^t(p_{1j}, \ldots, p_{nj}); \boldsymbol{a}_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\boldsymbol{b}_i = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{b}_i p_{ij} = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)\boldsymbol{p}_j$$

と表せる. そこで, $P = (p_{ij}) = (\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n)$ とおけば, 形式的に次のように表せる.

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n)P.$$

この P のことを, 基底 $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ から基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ への**変換行列** という.

定理 7.4 ベクトル空間 V の基底の変換を表す行列は正則で, 逆行列は逆変換に対応する.

（証明）P を基底 $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ から基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ への変換行列として, Q を逆に, $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ から $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ への変換行列とする. この合成は単位行列となるので, $PQ = E$ をえる. ■

[数ベクトル空間の基底]

定理 7.5 数ベクトル空間 K^n において, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \in K^n$ に対し, 次は同値.

(1) $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ は K^n の基底.

(2) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ は一次独立.

(3) $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ は K^n の生成系, i.e., $K^n = L(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$.

(4) 行列 $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ は正則.

（証明）K^n の次元が n であることは明らかなので, (1) から (3) までの同値性は既に証明したことから明らか. また基底の変換行列を考えると, $\exists P$: n 次正則行列; $(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)P = EP = P$ から (1) なら (4) もいえる. 逆に $P = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ を正則として, $PP^{-1} = E$ を $(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)P^{-1} = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ と見ると, これは $\boldsymbol{e}_i$ が $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ の一次結合で表されることを意味する. 従って, $K^n = \mathbf{L}(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$. つまり (4) $\Rightarrow$ (3) がいえたことになる. ■

8 線形写像 (Linear mappings)

8.1 線形写像の定義，線形写像の表現行列, 基底変換と表現行列

定義 8.1 U, V を K ベクトル空間とする. 写像 $f : U \to V$ が**線形写像 (linear mapping)** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in U, {}^\forall c \in K, f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = f(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{b}), f(c\boldsymbol{a}) = cf(\boldsymbol{a})$.

また, $V = U$ のとき, 線形写像 $f : U \to U$ を U 上の**線形変換 (linear transform)** という.

定義 8.2 $U = U_n$ を n 次元 K ベクトル空間, $V = V_m$ を m 次元 K ベクトル空間として, $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_n\}, \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_m\}$ をそれぞれの基底とする. このとき, 線形写像 $f : U \to V$ に対し, $\{\boldsymbol{v}_i\}$ が V の基底であることから, 各 $1 \le j \le n$ に対し, ${}^\exists a_{ij} \in K; f(\boldsymbol{u}_j) = \displaystyle\sum_{i=1}^n a_{ij}\boldsymbol{v}_i$ と表せる. このとき, $m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$ を基底 $\{\boldsymbol{u}_j\}$ から $\{\boldsymbol{v}_i\}$ に関する f の**表現行列 (representation matrix)** という.

上の定義を形式的に, 次のように表すと覚えやすい.

$$f(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_n) = (f(\boldsymbol{u}_1), f(\boldsymbol{u}_2), \dots, f(\boldsymbol{u}_n)) = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_m)A.$$

任意の $\boldsymbol{x} \in U$ に対し, ${}^\exists x_j \in K; \boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{u}_n$ から $\widetilde{\boldsymbol{x}} = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ とおくと

$$f(\boldsymbol{x}) = x_1 f(\boldsymbol{u}_1) + \cdots + x_n f(\boldsymbol{u}_n) = (f(\boldsymbol{u}_1), \dots, f(\boldsymbol{u}_n))\widetilde{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_m)A\widetilde{\boldsymbol{x}}.$$

[基底変換]

定理 8.1 U, V を K ベクトル空間, $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_n\}, \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_m\}$ を U, V それぞれの基底とする. 線形写像 $f : U \to V$ のこれらの基底に関する表現行列を A とする, i.e.,

$$f(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n) = (f(\boldsymbol{u}_1), f(\boldsymbol{u}_2), \dots, f(\boldsymbol{u}_n)) = (\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m)A.$$

さらに $\{\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_2, \dots, \boldsymbol{u}'_n\}, \{\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \dots, \boldsymbol{v}'_m\}$ も U, V それぞれの基底とすると, $^\exists$ 基底の変換行列 $P.Q$: それぞれ n 次, m 次正則行列;

$$(\boldsymbol{u}'_1, \dots, \boldsymbol{u}'_n) = (\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)P, \quad (\boldsymbol{v}'_1, \dots, \boldsymbol{v}'_m) = (\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m)Q.$$

このとき, これらの基底に関する表現行列を A', i.e., $f(\boldsymbol{u}'_1, \dots, \boldsymbol{u}'_n) = (\boldsymbol{v}'_1, \dots, \boldsymbol{v}'_m)A'$ とすると, $A' = Q^{-1}AP$.

（証明）まず, $(\boldsymbol{u}'_1, \dots, \boldsymbol{u}'_n) = (\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)P$ から, 次が成り立つことに注意しておく.

$$f(\boldsymbol{u}'_1, \dots, \boldsymbol{u}'_n) = (f(\boldsymbol{u}'_1), \dots, f(\boldsymbol{u}'_n)) = (f(\boldsymbol{u}_1), \dots, f(\boldsymbol{u}_n))P = f(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)P.$$

実際, $\boldsymbol{u}'_i = \sum_k \boldsymbol{u}_j p_{ki}$ と f の線形性から, $f(\boldsymbol{u}'_i) = \sum_k f(\boldsymbol{u}_j)p_{ki}$ となり, これは上の式を意味する. 従って, $f(\boldsymbol{u}'_1, \dots, \boldsymbol{u}'_n) = f(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)P = (\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m)AP$. 一方, $f(\boldsymbol{u}'_1, \dots, \boldsymbol{u}'_n) = (\boldsymbol{v}'_1, \dots, \boldsymbol{v}'_m)A' = (\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m)QA'$. よって,

$$(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m)AP = (\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m)QA'.$$

$\{\boldsymbol{v}_i\}$ の一次独立性から, $AP = QA'$. さらに Q が正則であるから, $A' = Q^{-1}AP$ を得る. ■

系 8.1 ベクトル空間 U 上の線形変換 f の, ある基底に関する表現行列が A で, この基底を行列 P で, 別の基底に変換したとき, これについての f の表現行列は $P^{-1}AP$ となる.

8.2 線形写像の像と核

定義 8.3 U, V を K ベクトル空間, $f : U \to V$ を線形写像とする.
　$\mathrm{Ker}\,(f) = \{\boldsymbol{x} \in U; f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}$: f の核 **(kernel)**.
　$\mathrm{Im}\,(f) = \{f(\boldsymbol{x}) \in V; \boldsymbol{x} \in U\}$: f の像 **(image)**

補題 8.1 $\mathrm{Ker}\,(f)$ は U の部分空間で, $\mathrm{Im}\,(f)$ は V の部分空間.

（証明）$c \in K$ とする. $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in \mathrm{Ker}\,(f)$ に対し, $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}') = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x}') = \boldsymbol{0}+\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ と $f(c\boldsymbol{x}) = cf(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ から $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}', c\ vx \in \mathrm{Ker}\,(f)$. また, $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}' \in \mathrm{Im}\,(f)$ に対し, ${}^\exists\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in U; \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}' = f(\boldsymbol{x}')$ から $\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}' = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x}') = f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}')$, $c\boldsymbol{y} = cf(\boldsymbol{x}) = f(c\boldsymbol{x})$ で, $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}' \in U, c\boldsymbol{x} \in U$ から $\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}', c\boldsymbol{y} \in \mathrm{Im}\,(f)$. ■

補題 8.2 $m \times n$ 行列 $A = (\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n)$ に対し, n 次元数ベクトル空間 K^n において $\mathrm{Im}\,(f_A) = \mathbf{L}(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n)$.

（証明）表現すれば明らかなことだが, $\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, \dots, x_n) \in K^n$ に対し, $f_A(\boldsymbol{x}) = x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n \in \mathbf{L}(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n)$. 逆に任意の $\boldsymbol{y} = x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n \in \mathbf{L}(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n)$ に対し, $\boldsymbol{x}$ を初めのように置けば, $\boldsymbol{y} = f_A(\boldsymbol{x}) \in \mathrm{Im}\,(f_A)$. ■

定理 8.2 (次元公式) U, V を K ベクトル空間, $f : U \to V$ を線形写像とする.

$$\dim \mathrm{Ker}\,(f) + \dim \mathrm{Im}\,(f) = \dim U.$$

（証明）$\mathrm{Ker}\,(f)$ の基底を取り, 基底の延長を用いれば容易に分かる. 実際, $U = U_n$ を n 次元として, $\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_r\} \subset \mathrm{Ker}\,(f) \subset U$ を $\mathrm{Ker}\,(f)$ の基底とする. 基底の延長定理から, これに $\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_{n-r}$ を加えて, $\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_{n-r}\}$ を U の基底とできる. 更に, $\{f(\boldsymbol{b}_1), \dots, f(\boldsymbol{b}_{n-r})\}$ が $\mathrm{Im}\,(f)$ の基底となることが分かる. 実際, まず $c_1 f(\boldsymbol{b}_1) + \cdots + c_{n-r} f(\boldsymbol{b}_{n-r}) = \boldsymbol{0}$ とすると, $f(c_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + c_{n-r}\boldsymbol{b}_{n-r}) = \boldsymbol{0}$ となり, $c_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + c_{n-r}\boldsymbol{b}_{n-r} \in \mathrm{Ker}\,(f)$ から ${}^\exists\{d_j\}; c_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + c_{n-r}\boldsymbol{b}_{n-r} = d_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + d_r\boldsymbol{a}_r$ と表せる. しかし, $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_{n-r}$ の一次独立性から $c_i = d_j = 0$ を得る. 従って $f(\boldsymbol{b}_1), \dots, f(\boldsymbol{b}_{n-r})$ は一次独立. さらに ${}^\forall\boldsymbol{y} \in \mathrm{Im}\,(f)$, ${}^\exists\boldsymbol{x} \in U; \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$. ここで, $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_r\boldsymbol{a}_r + x_{r+1}\boldsymbol{b}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{b}_{n-r}$ と表されるので, $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = x_{r+1}f(\boldsymbol{b}_1) + \cdots + x_n f(\boldsymbol{b}_{n-r})$ となり, $f(\boldsymbol{b}_1), \dots, f(\boldsymbol{b}_{n-r})$ が $\mathrm{Im}\,(f)$ の基底となる. ■

8.3 ベクトル空間の同型

定義 8.4 U, V を K ベクトル空間とする. $f : U \to V$ が同型写像 **(isomorphism)** $\overset{\text{def}}{\iff}$ f が全単射な線形写像. さらにこのとき, U と V は同型 **(isomorphic)** であるという.

例 8.1 $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}[x]_\leq$ を $\boldsymbol{a} = {}^t(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ に対して, $f(\boldsymbol{a}) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ と定義するとこれは同型写像となる.

例題 8.1 n 次行列 A に対し, K^n 上の線形変換 f_A が同型 $\iff$ A が正則であることを証明せよ.

（解）A が逆行列を持つことと, f_A が逆変換を持つことは同値であるから明らか. 実際, f_A が同型なら, 逆写像 f_A^{-1} が存在する. これに対応する行列を B とすると, $f_A^{-1} \circ f_A = id$ より, $BA = E$ となる. 従って A は正則. 逆に A が正則なら, $f_{A^{-1}}$ が f_A の逆変換となるので f_A は同型. ■

定理 8.3 線形写像 $f: U \to V$ が単射 $\iff$ Ker $(f) = \{\mathbf{0}\}$.

(証明) $f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{y}) \iff \mathbf{0} = f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$ に注意すれば, f が単射 $\overset{\text{def}}{\iff}$ $[f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{y}) \Rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}] \iff [f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \mathbf{0}] \iff [f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{0}] \iff$ Ker $(f) = \{\mathbf{0}\}$. ■

定理 8.4 任意の n 次元 K ベクトル空間は K^n と同型.

(証明) V の基底を $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n$ として, $\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, \dots, x_n) \in K^n$ に対し, $f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^n x_i \boldsymbol{a}_i$ と定義すると, $f: K^n \to V$ は明らかに線形写像で, しかも $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n$ の一次独立性から $f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ $\Rightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, 即ち, Ker $(f) = \{\mathbf{0}\}$ となり, f は単射. さらに全射であることも明らかなので, 同型となる. ■

以上をまとめると

定理 8.5 $f: U \to V$ 線形写像 $\Longrightarrow \dim U = \dim \mathrm{Ker}\,(f) + \dim \mathrm{Im}\,(f)$.
更に f: 単射 $\iff$ Ker $(f) = \{\mathbf{0}\} \iff \dim U = \dim \mathrm{Im}\,(f)$.
特に f: 同型 $\Longrightarrow \dim U = \dim V$.

8.4 線形写像と行列のランク

定義 8.5 線形写像 $f: U \to V$ に対し, rank $(f) = \dim \mathrm{Im}\,(f)$ を f の**ランク・階数 (rank)** という. また $m \times n$ 行列 A に対し, rank $(A) =$ rank (f_A) を A の**ランク・階数 (rank)** という.

定理 8.6 $m \times n$ 行列 A と n 次正則行列 P, m 次正則行列 Q に対し, rank $(QAP) =$ rank (A).

(証明) $\mathrm{Im}\,(f_{QAP})$ と $\mathrm{Im}\,(f_A)$ が同型であることを示せば良い. $f_A, f_{QAP}: K^n \to K^m$ で、f_Q on K^n について考える. ${}^\forall \boldsymbol{x} \in K^n$, $f_Q(f_A(\boldsymbol{x})) = QA\boldsymbol{x} = QAP(P^{-1}\boldsymbol{x}) = f_{QAP}(P^{-1}\boldsymbol{x})$. $P^{-1}\boldsymbol{x} \in K^n$ に注意して, ${}^\forall y = f_A(\boldsymbol{x}) \in \mathrm{Im}\,(f_A), f_Q(\boldsymbol{y}) \in \mathrm{Im}\,(f_{QAP})$, i.e., $f_Q(\mathrm{Im}\,(f_A)) \subset \mathrm{Im}\,(f_{QAP})$ を得る. 従って $g = f_Q|_{\mathrm{Im}\,(f_A)} : \mathrm{Im}\,(f_A) \to \mathrm{Im}\,(f_{QAP})$ が同型であることを示せば良い. まず Q が正則なので, f_Q は同型, 特に, 単射. よって, g も単射. 次に ${}^\forall \boldsymbol{z} \in \mathrm{Im}\,(f_{QAP}), {}^\exists \boldsymbol{y} \in K^n; \boldsymbol{z} = f_{QAP}(\boldsymbol{y})$ より, $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ とおくと, 上の計算から, $f_Q(f_A(\boldsymbol{x})) = f_{QAP}(\boldsymbol{y})$ となり, $\boldsymbol{z} = f_{QAP}(\boldsymbol{y}) \in \mathrm{Im}\,(g)$ がいえる. 従って, g は全射. 以上から g は全単射, i.e., 同型となる. ■

定理 8.7 前に与えたランクの定義と, 本節での定義は一致する.

(証明) 本節でのランクは, 上の定理から, 右と左から正則行列をかけても変わらない, つまり, 基本変形によっても変わらない. 前の定義のランクは, A を基本変形によって, $(\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_r, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})$ の形にしたときの r であったので, 結局, 初めから, A が $(\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_r, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})$ の形のときに, 本節でのランクが r となることをいえば良い. このとき $\mathrm{Im}\,(f_A) = \mathbf{L}(\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_r)$ なので ($\to$ 問), $\dim \mathrm{Im}\,(f_A) = r$ となり, 証明を終わる. ■

問 $A = (\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_r, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})$ なら $\mathrm{Im}\,(f_A) = \mathbf{L}(\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_r)$ となることを示せ.

定理 8.8 行列 A に基本変形を施して, 行列 B を得たとき, rank $(A) =$ rank (B).

例題 8.2 $m \times n$ 行列 A に対し, rank $(A) \le m \wedge n = \min\{m, n\}$ を示せ.

（解） $f_A : K^n \to K^m$ で, rank $(A) = \dim \mathrm{Im}\,(f_A) \leq \dim K^m = m$. また次元公式から $\dim \mathrm{Im}\,(f_A) = \dim K^n - \dim \mathrm{Ker}\;(f_A) \geq \dim K^n = n$. ■

$m \times n$ 行列 A に対し, 任意の r 個の行と列を取り出して, その行列式を考えたものを A の **r 次の小行列式**という.

定理 8.9 $m \times n$ 行列 A に対し, $r(A) = \max\{r; A$ の r 次の小行列式 $\neq 0\}$ とおく. このとき,
(1) $r(A)$ の値は, 基本変形で変わらない. (2) $r(A) = \mathrm{rank}\;(A)$.

（証明） (1) 列基本変形について考える (行も同様). 行列式の多重線形性に注意する. まず, スカラー $c \neq 0$ 倍については, 小行列式も, 元の小行列式の c 倍となるので, それが 0 かどうかということについては変わらない. また, 列の入れ換えについても, 1 次の小行列式は変わらないし, 2 次以上でも, 元のどれかと同じか, -1 倍で与えられるので同様. 次に A の第 i 列を c 倍して第 j に加えて, A' となったときを考える. A' の小行列式で, 第 j 列を含んでないものは, 元と同じで, 第 j 列を含んでいれば, 元の小行列式 Δ に, 第 j 列を第 i 列に置き換えた行列の Δ に対応する小行列式 Δ' を c 倍し, 加えた値 $\Delta + c\Delta'$ となる. もしこれが 0 でなければ, $\Delta \neq 0$ or $\Delta' \neq 0$ となる (共に 0 なら上の和もそうなってしまうから). しかも $\Delta' \neq 0$ のとき, (良く考えれば) これは A のある小行列式の ± 1 倍であることが分かる. (実際, これは j 列が, 元の A の i 列となっていて, 他の列は A の i, j 列以外となるので.) これから $r(A') \leq r(A)$ が成り立つ (実際, $r(A')$ 次の A' の小行列式で 0 でないものがあるので, 同じ $r(A)$ 次の A の小行列式にも 0 でないものがあることになるから). さらに A' に列基本変形を施して A が得られるので, A, A' を入れ換えて考えると, $r(A) \leq r(A')$ となり, 結局 $r(A') = r(A)$ を得る.

(2) まず $A = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{0}, \ldots, \boldsymbol{0})$ のとき, rank $(A) = r$ で, また明らかに $r(A) = r$. 次に任意の行列は基本変形で, この形にでき, rank (A) も $r(A)$ も基本変形で変わらないので, 結局, 題意を得る. ■

系 8.2 任意の行列 A に対し, rank $({}^tA) = \mathrm{rank}\;(A)$.

（証明） 行列式が転置で不変であることから, 前定理の $r(A)$ も同様なので明らか. ■

9 連立一次方程式 (Simultaneous equations)

9.1 同次連立一次方程式の場合, 非同次の場合の解の存在

$m \times n$ 次行列 $A = (a_{ij})$ と m 次ベクトル $\boldsymbol{b} = {}^t(b_1, \ldots, b_m)$ に対し, n 次の未知ベクトル $\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$ についての連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ において, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ のとき, i.e., $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を**同次連立一次方程式**という.

$f_A : K^n \to K^m; f_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ を用いると, Ker $(f_A) = \{\boldsymbol{x}; f_A(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\} = \{\boldsymbol{x}; A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ より, これを同次連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の**解空間**という. また Ker (f_A) の基底 $\{\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_s\}$ を**基本解**という.

定理 9.1 同次連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解が $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ のみ $\iff$ rank $(A) = n$.

（証明） 次元公式から $\dim \mathrm{Ker}\;(f_A) = n - \dim \mathrm{Im}\,(f_A) = n - \mathrm{rank}\;(A)$ なので, 明らか. ■

$\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ のとき, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の一つの解 $\boldsymbol{x}_1$ を**特殊解**という.

定理 9.2 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解は, 存在すれば, 特殊解 $\boldsymbol{x}_1$ と $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解 $\boldsymbol{x}_0$ により, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{x}_1$ で与えられる.

（証明）もし他にも解 $\boldsymbol{x}_2$ があれば, $A\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{b}$ で, $A\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{b}$ を引くと, $A(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1)=\boldsymbol{0}$ となり, $\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1$ とすれば良い. ■

この証明から $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解が $\boldsymbol{0}$ しかなければ, $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解も, $\boldsymbol{x}_1$ のみとなる. これから次を得る.

系 9.1 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解が存在するとき, それが唯一つ $\iff$ rank $(A)=n$.

定理 9.3 連立一次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ が解を持つ $\iff$ rank $(A)=$ rank $(A|\boldsymbol{b})$.

（証明）$A=(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n)$ とおくと, rank $(A)=\dim\mathbf{L}((\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n)$, rank $(A|\boldsymbol{b})=\dim\mathbf{L}((\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{b})$. もし $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ が解 $\boldsymbol{x}={}^t(x_1,\dots,\boldsymbol{x}_n)$ を持てば, $\boldsymbol{b}=\sum x_i\boldsymbol{a}_i$ より, $\mathbf{L}((\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{b})=\mathbf{L}((\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n)$, i.e., rank $(A|\boldsymbol{b})=$ rank (A). 逆に解を持たないとき, $\boldsymbol{b}\notin\mathbf{L}((\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n)$ となり, このとき, $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{b}$ が一次独立となるので, rank $(A)=\dim\mathbf{L}((\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n)<\dim\mathbf{L}((\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{b})=$ rank $(A|\boldsymbol{b})$. ■

9.2 クラメールの公式

定理 9.4 n 次行列 A に対し, 連立方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ が唯一つの解を持つ $\iff$ A が正則.

（証明）A が正則 $\iff$ rank $(A)=n$ なので, まず解が一意なら, 前の系から rank $(A)=n$ で, A は正則. 逆に A が正則なら, $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ に左から A^{-1} をかければ, $\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}$ で唯一つの解を得る. ■

定理 9.5 (クラメールの公式 (Cramer's formula)) n 次行列 $A=(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n)$ が正則のとき, 連立方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解 $\boldsymbol{x}={}^t(x_1,\dots,x_n)$ は次で与えられる.

$$x_i=\frac{\det(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_{i-1},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}_{i+1},\dots,\boldsymbol{a}_n)}{\det(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n)}.$$

（証明）$\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}=\widetilde{A}\boldsymbol{b}/(\det A)$ で, $\widetilde{A}$ の (i,k) 成分が $\Delta(A)_{ki}=(-1)^{i+k}\det A_{ki}$ であったから, $\widetilde{A}\boldsymbol{b}$ の第 i 成分 $\sum_{k=1}^n(\widetilde{A})_{ik}b_k=\sum_{k=1}^n\Delta(A)_{ki}b_k$ が $c_i=\det(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_{i-1},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}_{i+1},\dots,\boldsymbol{a}_n)$ と等しいことを示せば良い. しかし, これを第 i 列について余因子展開すれば, $c_i=\sum_{k=1}^n b_k\Delta(A)_{ki}$ となり, 同じであることが分かる. ■

例題 9.1 $|c|>1$ のとき, 次の連立方程式を解け.

$$\begin{cases} x_1+cx_2+\cdots+cx_n=1 \\ cx_1+x_2+\cdots+cx_n=1 \\ \qquad\qquad\vdots \\ cx_1+cx_2+\cdots+x_n=1 \end{cases}$$

（解）係数の行列を A とすると前の行列式での例題から, $\det A=\{1+(n-1)c\}(1-c)^{n-1}$. $|c|>1$ から A は正則. 従って, 解は一意に存在する. ここで各 x_i は同じ方程式を満たすので, 解が一意ということは全て同じ値をとることになる. これから, 方程式を全て加えて, $x_i=x$ とすると, $\{1+(n-1)c\}x=n$ となり, 結局, $x_i=x=1/\{1+(n-1)c\}$ を得る. 実際, クラメールの公式を用いても, 例えば

$$x_1=\frac{1}{\{1+(n-1)c\}(1-c)^{n-1}}\begin{vmatrix}1 & c & \cdots & c\\ 1 & 1 & \cdots & c\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & c & \cdots & 1\end{vmatrix}$$

で,

$$\begin{vmatrix}1 & c & \cdots & c\\ 1 & 1 & \cdots & c\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & c & \cdots & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & c & \cdots & c\\ 0 & 1-c & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1-c\end{vmatrix}=(1-c)^{n-1}$$

なので, $x_1=x=1/\{1+(n-1)c\}$. 他も全く同様である. ■

[一般逆行列による解法]

$m\times n$ 行列 A の一般逆行列 A^- とは, $AA^-A=A$ をみたす $n\times m$ 行列であった.

定理 9.6 $m\times n$ 行列 A に対し, 連立方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解が存在するなら, その解は $\boldsymbol{x}=A^-\boldsymbol{b}+(E_n-A^-A)\boldsymbol{c}$, 但し, $\boldsymbol{c}$ は任意の n 次ベクトル.

（証明）まず $\boldsymbol{x}$ が解なら, 解の式で $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{x}$ を代入すると, $\boldsymbol{b}=A\boldsymbol{x}$ より, $A^-\boldsymbol{b}+(E_n-A^-A)\boldsymbol{x}=A^-A\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{x}-A^-A\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}$ となるので, $\boldsymbol{x}=A^-\boldsymbol{b}+(E_n-A^-A)\boldsymbol{c}$ の形（の一部）で与えられることは分かる. 逆に一般に, この形が解となることを示す. 解の存在から, ${}^\exists\boldsymbol{x}_0; A\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{b}$. また解の式に左から A をかけ, $\boldsymbol{b}=A\boldsymbol{x}_0$ を代入すると, $A\boldsymbol{x}=A\{A^-\boldsymbol{b}+(E_n-A^-A)\boldsymbol{c}\}=AA^-\boldsymbol{b}+(A-AA^-A)\boldsymbol{c}=AA^-A\boldsymbol{x}_0+(A-AA^-A)\boldsymbol{c}=A\boldsymbol{x}_0+(A-A)\boldsymbol{c}=A\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{b}$. これから確かに $\boldsymbol{x}=A^-\boldsymbol{b}+(E_n-A^-A)\boldsymbol{c}$ は解となる. 以上から, 全ての解がこの形で与えられることが言えた. ■