初めに

まず, 小学生でも分かる話から

・ 1 と $0.9999\cdots$ はどちらが大きい？ $\rightarrow 1/3 = 0.333\cdots$ を 3 倍すれば…？

・$1/2 + 1/4 + 1/8 + \cdots =$？ $\rightarrow [0,1]$ 区間の線分の絵を描き, 長さを並べていけば…？

・半径 $r > 0$ の円の面積の公式 πr^2 を導け.

$\rightarrow$ 円を 4 等分, 8 等分, 16 等分, …として, 扇形を交互に並べれば,…？

中学生レベルなら

・三平方の定理を証明せよ. 即ち, $a, b, c > 0$ の長さを持つ直角三角形で、斜辺の長さが c のとき $a^2 + b^2 = c^2$ を示せ.

$\rightarrow$ 同じ 4 つの直角三角形で, 斜辺を 1 辺とする正方形を囲んでできる大きい正方形の面積は?

高校生レベルでは

・楕円 $(x/a)^2 + (y/b)^2 \leq 1$ の面積は？ $(a, b > 0)$

$\rightarrow y = b\sqrt{1-(x/a)^2}$ を $-a \leq x \leq a$ で積分して 2 倍だが…？

・等比級数 $a + ar + ar^2 + \cdots =$ の公式を導け. $(r > 0)$

$\rightarrow = S$ とおいて, a 倍して引くが…？その前に, a, r で場合分け.

上の問は何れも学校で習うものだが, 難しい理論を用いたりしなくても, 考え方一つで簡単に解けたりする. また, 解き方も一つとは限らない。

筆者は, 小学 5 年生の時に, 上に述べた円の面積の求め方を, 先生が絵を使って説明してくれたのを今でも覚えている. しかし, これも高校生になると, 積分を用いて求められることを知る.

大事なのは, 色々な考え方ができるということで, 数学とはそれを身に着けるための学問だと言っても良いかも知れない.

上の小五で習った, 円の面積の求め方は, 筆者にとって, 初めての数学的感動だったかもしれない. それ以来, 公式は作るものだと認識し, その作り方を理解し, いつでも作れるようにと覚えて行った. 今では, 数学そのものが, 自分の中で作り上げていく学問だと思っている.

また, 解析学では, 「極限」という概念と, 「不等式評価」が, 非常に重要な要素となる. 微分積分学では, そのための基本を学ぶことになる.

【答え】

・$1 = 0.999\cdots$

・$1/2 + 1/4 + 1/8 + \cdots = 1$ 長さ 1 の線分の絵を描き, その半分に, 残り半分の半分を, 更に残りの半分を…と順に加えて行くので, 明らかに 1 に近づく.

・縦が半径 r, 横が円周の半分 πr の長方形に近づくので, πr^2 (円周=直径 $\times \pi$ に注意.)

・大きい正方形は, 1 辺が $a + b$, 一方, 4 つの直角三角形と 1 辺が c の正方形の和でもあるので, $(a + b)^2 = 2ab + c^2$

・$x/a = \tilde{x}$ と変数変換すれば, $dx = a d\tilde{x}$ で, 丁度, 半径 1 の円の面積の積分計算の ab 倍.

（ちなみに, 多変数の積分を学べば, 楕円上での重積分で与えられることを知るので, 2 変数の変数変換 $x/a = \tilde{x}, y/b = \tilde{y}$ より, $dxdy = ab d\tilde{x}d\tilde{y}$ で, 単位円での重積分となるので明らか, と分るようになる.)

・まず, $a = 0$ なら 0. $a \neq 0$ とすると, 公比 $r \geq 1$ のとき, $a \cdot \infty$ なので, $a > 0$ なら ∞, $a < 0$ なら $-\infty$. $0 < r < 1$ のとき, $(1-r)S = a$ を得るので, $S = \sum_{n\geq 1} r^{n-1} = a/(1-r) =$ 初項$/(1-$ 公比$)$.

ちなみに最初の 2 つの問いも, 実は等比級数で, それぞれ, $(9/10)(1-1/10) = 1$, $(1/2)(1-1/2) = 1$ と計算できる. 但し, 無限に足し続けることは現実には不可能で, 無限和とは, 部分和の極限として定義される. 即ち, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} := \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N}$ (勿論, この極限が収束するという条件の下で.)

最後に, 円周率 $\pi = 3.14\cdots$ は「円周/直径」$= \ell/(2r)$ で定義されるが (r は半径: radius), これは一体どうやって計算するのだろうか？円周と直径を実際に測って, 割るとしても, 計測での誤差が出てしまう !! $\rightarrow$ その一つの答えが, 「無限級数表現」である. (それは、「微分積分学 **I**」 の最後に.)