関数解析　(Functional Analysis)

平場　誠示 (Seiji HIRABA)

2018 年 5 月 11 日

目次

1　**線形代数復習** 1

1.1　n 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ or $\mathbf{C}^n$ . . . 1

1.2　線形空間 (ベクトル空間) (Linear sp. (Vector sp.)) . . . 1

2　**ノルム空間 (Normed Spaces)** 2

2.1　ノルム (Norm) . . . 2

3　**バナッハ空間 (Banach Spacses)** 3

3.1　Banach 空間の例 (Examples of Banach sps) . . . 3

3.2　可分と同値なノルム (Separable & equivarent norms) . . . 6

3.3　完備化 (Completion) . . . 7

4　**ヒルベルト空間 (Hilbert Spaces)** 7

4.1　プレ・ヒルベルト空間 (内積空間) (Pre-Hilbert sp. (Inner prod. sp.)) . . . 7

4.2　ヒルベルト空間 (Hilbert sp.) . . . 8

4.3　射影定理 (Projection theorem) . . . 9

4.4　正規直交系 (ONS=orthonormal system) . . . 10

5　**線形作用素 (Linear Operators)** 12

5.1　有界作用素の例 (Examples of bounded operators) . . . 13

5.2　逆作用素 (Inverse operators) . . . 14

6　**三大基本原理 (一様有界性原理, 開写像定理, 閉グラフ定理)** 16

6.1　一様有界性原理 (Uniform bounded principle) . . . 16

6.2　開写像定理 (Open mapping theorem) . . . 17

6.3　閉グラフ定理 (Closed graph theorem) . . . 18

7　**線形汎関数 (Linear Functionals)** 19

7.1　共役空間 (Dual spaces) . . . 19

7.2　ハーン・バナッハの拡張定理 (Hahn-Banach's extension thoerem) . . . 20

付録 A　補充証明 22
A.1　一般の測度空間での L^p の完備性 22
A.2　ノルム空間の完備化の定理と証明について 22
A.3　ソボレフ空間 $H^{k,p}(\Omega)$ 23
A.4　ワイエルシュトラスの多項式近似 23
A.5　有限次元ノルム空間の任意のノルムの同値性の証明 25
A.6　中線定理 25
A.7　ヒルベルト空間 $A^2(\Omega)$ 26

付録 B　弱収束, 共役作用素 28
B.1　弱収束 28
B.2　共役作用素 29

付録 C　レゾルベントとスペクトル 29

付録 D　コンパクト作用素 30

線形代数学において, **線形空間, 基底, 内積, 線形写像, 行列**など, 有限次元での基本的な事柄を学んだと思う. それらを数列や関数の集合などの**無限次元空間**においても話が出来るように一般化・抽象化したものが, **関数解析**と呼ばれる分野である.

ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{C}^n$ や**数列空間** ℓ^p, **連続関数の空間** $C([a,b])$, **可積分関数の空間** $L^p(\Omega)$ $(\Omega \subset \mathbf{R}^n)$ などに大きさの概念である**ノルム** $\|\cdot\|$ を入れ, その空間の性質や, さらにそれらの空間の間の**線形写像**の性質を調べて行くのである.

メリットとしては, 微分方程式や積分方程式を満たす関数 (= 解) があるか無いかを, 一般的な結果から導くことが出来たり, さらに解が存在するとき, その解を具体的に表現出来たりすることがある. また抽象的に見ることにより, 現象の理解が, より容易になったりすることもある.

初めは, 抽象化により, 話が逆に見えにくくなったという印象をもつ人もいるかも知れないが, 常に上に挙げた具体例を頭に描きながら, 理解して行って欲しい. 基本となるのはあくまで線形代数で, それをより一般の空間に発展させて行ったものであり, 極端に難しいことをしている訳では無い！ということを強く言っておく. ただ, 有限次元と無限次元との違いは, かなり大きいもので, その点には注意し, 尚且つ, 意識して勉強して行ってもらいたいと思う.

本テキストは, **増田　久弥 著　「関数解析」　裳華房**の内容に沿って述べてあるが, 半年間の講義用という制限の下で書かれているので, 色々な例や定理など, 省略した部分は大きい. もっと詳しく知りたい方は是非, 上記、教科書をご覧頂きたい.

1 線形代数復習

1.1 n 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ or $\mathbf{C}^n$

$n \in \mathbf{N}$. $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n$ (or $\mathbf{C}^n$), 和: $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$, スカラー積: $\alpha \in \mathbf{R}$ (or $\mathbf{C}$) に対し, $\alpha x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$ と def. $\mathbf{R}^n$ (or $\mathbf{C}^n$) はベクトル空間となる. さらに

$$(x, y) = \sum_{j=1} x_j y_j \quad \text{in } \mathbf{R}^n \qquad \text{or} \qquad (x, y) = \sum_{j=1} x_j \overline{y_j} \quad \text{in } \mathbf{C}^n$$

とおけば, 内積となり, この内積を用いて x の大きさ（ノルム）を $|x| = (x, x)^{1/2}$ と定める. この $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{C}^n$ に上の和とスカラー積, 内積を入れた空間を n **次元ユークリッド空間 (Euclid spaces)** と呼ぶ. (これらは後に述べる **Hilbert sp.** であり, 従って **Banach sp.** でもある.)

1.2 線形空間 (ベクトル空間) (Linear sp. (Vector sp.))

$K = \mathbf{R}$ or $\mathbf{C}$ とおく.

定義 1.1 (線形空間) 集合 X が K **上の線形空間 (ベクトル空間)** とは和とスカラー積が定義され, i.e., ${}^\forall x, y \in X, x + y \in X$, ${}^\forall \alpha \in K, {}^\forall x \in X, \alpha x \in X$; 次をみたすときをいう.

(i) **(加法：結合則)** $(x + y) + z = x + (y + z)$ $(x, y, z \in X)$
(ii) **(加法：交換則)** $x + y = y + x$ $(x, y \in X)$
(iii) **(零元の存在)** ${}^\exists \theta \in X; {}^\forall x \in X, x + \theta = x$ ($\theta = 0$ と表す)
(iv) **(逆元の存在)** ${}^\forall x \in X, {}^\exists x' \in X; x + x' = 0$ ($x' = -x$ と表す)
(v) **(分配則)** $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$, $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ $(x, y \in X, \alpha, \beta \in K)$
(vi) **(スカラー積：結合則)** $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ $(x \in X, \alpha, \beta \in K)$
(vii) **(単元の存在)** $1x = x$ $({}^\forall x \in X)$

問 1.1 零ベクトルの一意性を示せ. (${}^\exists \theta \in X; {}^\forall x \in X, x + \theta = x$ の θ の一意性)

[解] もし ${}^\exists \theta' \in X; {}^\forall x \in X, x + \theta' = x$ とすると $\theta = \theta + \theta' = \theta' + \theta = \theta'$ となり, 一意である.

問 1.2 逆元の一意性を示せ. ($x \in X$ に対し, ${}^\exists x' \in X; x + x' = 0$ の x' の一意性)

[解] $x \in X$ に対し, もし ${}^\exists x'' \in X; x + x'' = 0$ とすると $0 = x + x' = x + x''$ より, 結合則, 交換則を用いて $x' = x' + (x + x'') = (x' + x) + x'' = (x + x') + x'' = x''$.

(1) 線形空間 X において $x_1, \dots, x_n \in X$ が

・**一次独立 (線形独立) (linear independent)**
$\overset{\text{def}}{\iff}$ $[\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0 \ (\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K) \Longrightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0]$

・**一次従属 (線形従属)(linear dependent)**
$\overset{\text{def}}{\iff}$ 一次独立でない, i.e., ${}^\exists(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq \mathbf{0}; \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$.

・X が n **次元 (n-dimensional)** $\overset{\text{def}}{\iff}$ n 個の一次独立なベクトルは存在するが, 任意の $n+1$ 個のベクトルは一次従属となる. このとき $\dim X = n$ と表す.

・X が**無限次元 (infinite dimensional)**

$\overset{\text{def}}{\iff}$ ${}^\forall n \in \mathbf{N}$, n 個の一次独立なベクトルが存在する.

・$x \in X$ が $x_1, \ldots, x_n \in X$ の**線形結合 (linear combination)**
$\overset{\text{def}}{\iff}$ ${}^\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K; x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$

問 1.3 X が n 次元なら適当な n 個の一次独立なベクトルがあって, 任意のベクトルはその一次結合で表されることを示せ, i.e.,

$\dim X = n \Longrightarrow {}^\exists x_1, \ldots, x_n \in X$; lin. indep., ${}^\forall x \in X, {}^\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K; x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$.

(2) X を K 上の線形空間とする.
$Y \subset X$ が**部分空間 (subspace)** $\overset{\text{def}}{\iff}$ ${}^\forall x, y \in Y, x + y \in Y$, かつ, ${}^\forall \alpha \in K, \alpha x \in Y$.

2 ノルム空間 (Normed Spaces)

線形空間において, ベクトルの大きさをはかるものとしてノルムという抽象概念を導入する. このノルムの入った線形空間をノルム空間という.

2.1 ノルム (Norm)

定義 2.1 (ノルム) 線形空間 X 上の実数値関数 $\|\cdot\| : x \to \|x\|$ が次をみたすとき $\|x\|$ を X **のノルム (norm)** という.

(i) $\|x\| \geq 0$ $(x \in X)$ **(非負性)**
(ii) $\|x\| = 0 \iff x = 0$ **(零値零元性)**
(iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ $(\alpha \in K, x \in X)$
(iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ $(x, y \in X)$ **(三角不等式)**

このとき $(X, \|\cdot\|)$ を**ノルム空間 (normed space)** という.

ノルム空間 $(X, \|\cdot\|)$ において $d(x, y) = \|x - y\|$ とおくと距離となる. 即ち, 次をみたす.

(d.1) $d(x, y) \geq 0$ $(x, y \in X)$ **(非負性)**
(d.2) $d(x, y) = 0 \iff x = y$ **(零値一意性)**
(d.3) $d(x, y) = d(y, x)$ $(x, y \in X)$ **(対称性)**
(d.4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ $(x, y, z \in X)$ **(三角不等式)**

つまりノルム空間は自然に距離空間 (X, d) とみなせる.

点列の収束 $\{x_n\} \subset X$ に対し, $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\|x_n - x\| \to 0$ $(n \to \infty)$
このとき x を $\{x_n\}$ の極限という.

命題 2.1 ノルム空間において和とスカラー積の演算は連続, i.e.,
(i) $x_n \to x, y_n \to y \Longrightarrow x_n + y_n \to x + y$, (ii) $\alpha_n \to \alpha, x_n \to x \Longrightarrow \alpha_n x_n \to \alpha x$.

命題 2.2 ノルムは連続関数, i.e., $x_n \to x \Longrightarrow \|x_n\| \to \|x\|$.

3 バナッハ空間 (Banach Spacses)

定義 3.1 完備なノルム空間を**バナッハ空間 (Banach sp.)** という. 即ち, 任意のコーシー列が, ノルムのもとで収束するときをいう. ちなみに, ノルム空間 $(X, \|\cdot\|)$ において,

- $\{x_n\} \subset X$: **コーシー列 (Cauchy sequence)** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\|x_n - x_m\| \to 0$ $(m, n \to \infty)$
- X が**完備 (complete)** $\overset{\text{def}}{\iff}$ 任意の Cauchy 列 $\{x_n\} \subset X$ が収束する, i.e., ${}^{\exists}x \in X; x_n \to x$.

3.1 Banach 空間の例 (Examples of Banach sps)

例 3.1 $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{C}^n$ は Banach sp.

ノルム空間であることはすぐに分るであろうし, 完備性については, 「微積」, もしくは「位相」で既に習ったと思うが, $\mathbf{R}^1$ においては, Cauchy 列なら有界列で, 収束部分列をもち, このとき元の Cauchy 列も同じ極限に収束することが言える. 2 次元以上もこれに帰着できる.

例 3.2 P_n: n 次多項式全体 $(n \in \mathbf{N})$

$$x(t) = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0 \in P_n \quad (a_k \in \mathbf{C})$$

和とスカラー積を $(x+y)(t) = x(t) + y(t)$, $(\alpha x)(t) = \alpha x(t)$, 即ち, $y(t) = b_n t^n + b_{n-1}^{n-1} + \cdots + b_0$ に対し, $(x+y)(t) = (a_n + b_n)t^n + \cdots + (a_0 + b_0)$, $(\alpha x)(t) = \alpha a_n t^n + \cdots + \alpha a_0$ と定めると P_n は線形空間. 次元は $\dim P_n = n + 1$ ($\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$ が一次独立)
ノルムは $P_n \ni x(t) = \sum_{j=0}^n a_j t^j$ に対し, $\|x\| = \sum_{j=0}^n |a_j|$.

問 3.1 P_n は Banach なることを示せ.

3.1.1 連続関数空間 (Continuous function space)

例 3.3 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 有界開集合上の実数値連続関数全体 $C(\overline{\Omega})$ は上と同様に和とスカラー積 $[(x+y)(t) = x(t) + y(t), (\alpha x)(t) = \alpha x(t)]$ を定義すれば線形空間. 次元は $\dim C[0,1] = \infty$. ノルム $\|x\|_\infty = \sup_{t\in\Omega} |x(t)|$ のもと, Banach sp. ($x(t) = t^{n-1}$ $(n \geq 1)$ が一次独立)

証明 $\{x_n\}$ を Cauchy 列 in $C(\overline{\Omega})$ とする. 各 $t \in \overline{\Omega}$ に対し,

$$|x_n(t) - x_m(t)| \leq \|x_n - x_m\|_\infty \to 0 (m, n \to \infty)$$

より, $\{x_n(t)\}$ は $\mathbf{R}$ での Cauchy 列. 実数の完備性より, ${}^{\exists}x^*(t) \in \mathbf{R}; x_n(t) \to x^*(t)$. 上の不等式で $n \to \infty$ とすれば,

$$|x^*(t) - x_m(t)| \leq \lim_{n\to\infty} \|x_n - x_m\|_\infty$$

右辺は $t \in \overline{\Omega}$ に無関係なので, 左辺で $\sup_{t\in\overline{\Omega}}$ をとり, 両辺で $m \to \infty$ とすれば

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{t\in\overline{\Omega}} |x^*(t) - x_m(t)| \leq \lim_{m,n\to\infty} \|x_n - x_m\|_\infty = 0$$

よって x^* は連続関数列 $\{x_n\}$ の一様収束極限なので x^* も連続. 従って $x_n \to x^*$ in $C(\overline{\Omega})$. ■

問 $C_b(\mathbf{R}) = \{x \in C(\mathbf{R}); \|x\|_\infty < \infty\}$ とおく. このとき, $(C_b, \|\cdot\|_\infty)$ は Banach sp. となるか？

注意 3.1 ノルムの入れ方は一通りではない. 例えば $P_n \ni x(t) \sum_{j=0}^n a_j t^j$ に対し, $\|x\|_\infty = \max|\alpha_j|$, また $x(t) \in C([0,1])$ に対し, $\|x\|_{L^1} = \displaystyle\int_{[0,1]} |x(t)|dt$ とおいてもノルムとなる. 要は目的に応じて使い分ける必要がある.

注意 3.2 $P_n[0,1]$: P_n を $[0,1]$ に制限した空間は線形空間としては $C[0,1]$ の部分空間である (確かめよ). さらに同じノルム (例えば $\|x\|_\infty = \sum_{t\in[0,1]} |x(t)|$) を入れたときにはノルム空間としても部分空間であるという見方をする. しかし異なるノルムを入れたときにはノルム空間としては全く別の空間とみる.

3.1.2 L^p 空間 (L^p-sp.)

例 3.4 $1 \le p < \infty$, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 開集合, $L^p(\Omega)$ を Ω 上の可測関数 u で

$$\|u\|_{L^p} := \left(\int_\Omega |u(t)|^p dt\right)^{1/p} < \infty$$

をみたすもの全体とする. $u = v$ a.e. となるものを同一視すれば, $L^p(\Omega)$ は Banach sp. となる.

この元を p **乗可積分関数** or L^p **関数** などと呼ぶ.

例 3.5 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 開集合, $L^\infty(\Omega)$ を Ω 上の可測関数 u で本質的に有界 $^\exists\alpha < \infty; |u(t)| \le \alpha$ a.e. なもの全体とする. さらにその下限を本質的上限といい

$$\|u\|_\infty \equiv \mathrm{ess.sup}_{t\in\Omega}|\mathrm{u(t)}| := \inf\{\alpha; |\mathrm{u(t)}| \le \alpha \quad \mathrm{a.e.}\}$$

と表す. このとき $|u| \le \|u\|_\infty$ a.e. が成り立つことに注意. $u = v$ a.e. となるものを同一視すれば, $L^\infty(\Omega)$ は Banach sp. となる.

この元を**本質的有界関数** or L^∞ **関数** などと呼ぶ.

上の 2 つの例で, まず三角不等式を示せば, normed sp. なることがいえる.

[ヘルダーの不等式 (Hölder's inequality)]

$1 \le p \le \infty$ に対し, $1 \le q \le \infty$ を $1/p + 1/q = 1$ で定める但し, $p = 1$ なら $q = \infty$ とし, $p = \infty$ なら $q = 1$ とする (q を p の**共役数**という). このとき $\|uv\|_{L^1} \le \|u\|_{L^p}\|v\|_{L^q}$ が成り立つ. 即ち,

$$\int_\Omega |u(t)v(t)|dt \le \left(\int_\Omega |u(t)|^p dt\right)^{1/p} \left(\int_\Omega |v(t)|^q dt\right)^{1/q} \quad (1 < p < \infty),$$

$$\int_\Omega |u(t)v(t)|dt \le \int_\Omega |u(t)|dt \ \|v\|_\infty \quad (p = 1, q = \infty).$$

証明 $p = 1, \infty$ のときは容易. $1 < p < \infty$ とする. $\|u\|_{L^p} = 0$ or $\|v\|_{L^q} = 0$ なら $uv = 0$ a.e. で明らかなので, $\|u\|_{L^p} \ne 0$ and $\|v\|_{L^q} \ne 0$ とする. 凸不等式 $ab \le a^p/p + b^q/q$ $(a, b \ge 0)$ を用いる. (log は上に凸なので, $\log(a^p/p + b^q/q) \ge (\log a^p)/p + (\log b^q)/q = \log a + \log b = \log(ab)$) より得る.) $a = |u(t)|/\|u\|_{L^p}$, $b = |v(t)|/\|v\|_{L^q}$ を代入して, 積分すれば良い.

$$\frac{\|uv\|_{L^1}}{(\|u\|_{L^p}\|v\|_{L^q})} \le \frac{\|u\|_{L^p}^p}{p\|u\|_{L^p}^p} + \frac{\|v\|_{L^q}^q}{q\|v\|_{L^q}^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

■

[ミンコフスキーの不等式 (Minkovsky's inequality)] **(三角不等式)**

$1 \le p < \infty$. $u, v \in L^p(\Omega)$ なら $u + v \in L^p(\Omega)$ で, $\|u + v\|_{L^p} \le \|u\|_{L^p} + \|v\|_{L^p}$ が成り立つ.

証明 まず $p = 1$ なら明らか. $p = \infty$ のときは容易 ($\to$ 次の問). $1 < p < \infty$ とする. 不等式を示せば十分. ($u + v \in L^p(\Omega)$ は従う.) $|u + v|^p \le (|u| + |v|)|u + v|^{p-1}$ に Hölder を用いれば容易に分かる. 実際, $1/q = 1 - 1/p = (p-1)/p$, i.e., $q = p/(p-1)$ に注意して

$$\|u+v\|_{L^p}^p \le \int_\Omega |u||u+v|^{p-1}dt + \int_\Omega |v||u+v|^{p-1}dt \le (\|u\|_{L^p} + \|v\|_{L^p})\left(\int_\Omega |u+v|^p dt\right)^{1/q}$$

これから $\int |u+v|^p dt = 0$ なら明らかで, $\neq 0$ なら $\left(\int_\Omega |u+v|^p dt\right)^{1/q} = \|u+v\|_{L^p}^{p/q}$ で両辺を割れば $p/q = p - 1$ より, 求める式を得る. ■

問 3.2 $\|u + v\|_\infty \le \|u\|_\infty + \|v\|_\infty$ を示せ.

上のことから $L^p(\Omega)$ がノルム空間なることは容易に分かる. Banach をいうためには完備性を示せば良い. その前に

問 3.3 $(X, \|\cdot\|)$ ノルム空間, $\{u_n\} \subset X$: Cauchy 列とする. ${}^\exists\{u_{n_k}\} \subset \{u_n\}; u_{n_k} \to u$ in X なら $u_n \to u$ in X を示せ.

証明 $\|u_k - u\| \le \|u_k - u_{n_k}\| + \|u_{n_k} - u\| \to 0 \quad (n_k \ge k \to \infty)$ より明らか.

問 3.4 Lebesgue 積分論での, 単調収束定理と Lebesgue の収束定理を厳密に述べよ.

[$L^p(\Omega)$ の完備性の証明]

$\{u_n\}$ Cauchy 列 in $L^p(\Omega)$ とする. このとき ${}^\exists\{u_{n_k}\}; \|u_{n_{k+1}} - u_{n_k}\|_{L^p} < 1/2^k$ がとれる. 単調収束定理を用いることにより,

$$\left\|\sum_{j=1}^\infty |u_{n_{j+1}} - u_{n_j}|\right\|_{L^p} = \lim_{m\to\infty}\left\|\sum_{j=1}^m |u_{n_{j+1}} - u_{n_j}|\right\|_{L^p} \le \sum_{j=1}^\infty \|u_{n_{j+1}} - u_{n_j}\|_{L^p} \le 1 < \infty.$$

よって $\sum_{j=1}^\infty |u_{n_{j+1}} - u_{n_j}| \in L^p(\Omega)$. これより $\sum_{j=1}^\infty |u_{n_{j+1}}(t) - u_{n_j}(t)| < \infty$ for a.e. $t \in \Omega$. 従って $k < m$ に対して,

$$|u_{n_m}(t) - u_{n_k}(t)| \le \sum_{j=k}^{m-1} |u_{n_{j+1}}(t) - u_{n_j}(t)| \to 0 \quad (m > k \to \infty) \quad \text{a.e.}$$

よって a.e. $t \in \Omega$ に対し, $\{u_{n_k}(t)\}$ は $\mathbf{R}$ での Cauchy 列となり, 完備性から $u_{n_k}(t) \to {}^\exists u^*(t)$. この u^* が $\{u_n\}$ の $L^p(\Omega)$ での極限となる. 実際,

$$|u_{n_k}(t)| \le |u_{n_1}(t)| + \sum_{j=1}^{k-1} |u_{n_{j+1}}(t) - u_{n_j}(t)| \le |u_{n_1}(t)| + \sum_{j=1}^\infty |u_{n_{j+1}}(t) - u_{n_j}(t)| \in L^p(\Omega)$$

より, 最後の式を $g(t)$ とおき, $k \to \infty$ とすれば a.e. $t \in \Omega$ に対し, $|u^*(t)| \le g(t) \in L^p(\Omega)$, i.e., $u^*(t) \in L^p(\Omega)$. さらに $k < m$ に対し,

$$\|u_{n_m} - u_{n_k}\|_{L^p} \le \sum_{j=k}^{m-1} \|u_{n_{j+1}} - u_{n_j}\|_{L^p} \le \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

ここで $|u_{n_m}(t) - u_{n_k}(t)| \le 2g(t) \in L^p(\Omega)$ から Lebsgue の収束定理が使えて, $m \to \infty$ として

$$\|u^* - u_{n_k}\|_{L^p} \le \frac{1}{2^{k-1}} \to 0 \quad (k \to \infty).$$

従って $u_{n_k} \to u^*$ in $L^p(\Omega)$ となり, 前の問から $u_n \to u^*$ in $L^p(\Omega)$ をえる. ■

もっと一般の測度空間 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ (X a set, $\mathcal{F}$ σ-field on X, $\mu = \mu(dx)$ 測度 on X) においても, $f \in L^p(X)$ or $L^p(X, d\mu)$ or $L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$ $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\|f\|_{L^p}^p := \int |f|^p d\mu = \int_X |f(x)|^p \mu(dx)$ と定義する. $L^\infty(X)$ も同様. このとき Hölder の不等式, Minkovsky の不等式が全く同様に証明でき, 従って $L^p(X)$ は Banach となる. さらにこれから次も分かる. (詳しくは補章を.)

例 3.6 $1 \le p < \infty$. 無限数列 $x = (x_1, x_2, \dots)$ で $\|x\|_{l_p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} < \infty$ をみたすもの全体を l^p とおくと Banach sp. となる.

例 3.7 無限数列 $x = (x_1, x_2, \dots)$ で $\|x\|_\infty = \sup\{|x_n|; n \ge 1\} < \infty$ をみたすもの全体を l^∞ とおくと Banach sp. となる.

3.2 可分と同値なノルム (Separable & equivarent norms)

X を Banach sp. とする.

・$L \subset X$ が X で**稠密 (dense)** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\overline{L} = X$ 但し, $\overline{L}$ は L の閉包 (L の触点全体; $x \in \overline{L} \iff {}^\exists\{x_n\} \subset L; x_n \to x$).

・X が**可分 (separable)** $\overset{\text{def}}{\iff}$ 稠密な可算部分集合が存在, i.e., ${}^\exists L \subset X; \overline{L} = X, \sharp L \le \aleph_0 = \sharp\mathbf{N}$.

例 3.8 $\mathbf{R}^n$ は可分な Banach sp. 実際, $\mathbf{Q}^n$ は可算稠密部分である.

例 3.9 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 有界開集合, $C(\overline{\Omega})$ は可分.

$C[0,1]$ において L を有理係数をもつ多項式を $[0,1]$ に制限したもの全体とすれば, 可算集合で, 補章に述べる**ワイエルシュトラスの多項式近似定理**より, $\overline{L} = C[0,1]$ も分かる.

X を線形空間として, その上に 2 つのノルム $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ が与えられているとき

・$\|\cdot\|_1$ と $\|\cdot\|_2$ が同値; $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ $\overset{\text{def}}{\iff}$ ${}^\exists 0 < c, c' < \infty; c\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le c'\|x\|_2$.

このとき normed sp. として $(X, \|\cdot\|_1)$ と $(X, \|\cdot\|_2)$ の構造は同じである. 即ち, 収束・発散が一致する. 特に $(X, \|\cdot\|_1)$ が完備なら $(X, \|\cdot\|_2)$ もそうなる.

問 3.5 X が有限次元なら X 上の任意の 2 つのノルムは同値であることを示せ. (答えは補章に)

3.3 完備化 (Completion)

X を完備でないノルム空間とする. ここへ適当な同値関係を入れることにより, 完備なノルム空間 $\widetilde{X}$ で, X をある同一視をすることにより, $\overline{X} = \widetilde{X}$ をみたすものが作れる.

実際, $\mathfrak{X}$ を X の Cauchy 列の全体とし, $\{x_n\}, \{y_n\} \in \mathfrak{X}$ に対し, $\{x_n\} \sim \{y_n\} \iff x_n - y_n \to 0\ (n \to \infty)$ と定義する. これは同値関係となり, これによる同値類を $\widetilde{x} = [\{x_n\}] \in \widetilde{X} := \mathfrak{X}/\sim$ とおき, $\widetilde{x} = [\{x_n\}] \in \widetilde{X}$ のノルムを $\|\widetilde{x}\| := \lim_{n\to\infty} \|x_n\|$ ($\{\|x_n\|\}$ は $\mathbf{R}$ の Caushy 列なので, この極限は存在) で定義すれば, $(\widetilde{X}, \|\cdot\|)$ が完備, i.e., Banach sp. となることが示せる. (この証明は補章で与える.)

しかも $x \in X$ と $[\{x_n \equiv x\}] \in \widetilde{X}$ を同一視することにより, $X \subset \widetilde{X}$ かつ $\overline{X} = \widetilde{X}$ と思うことが出来る. この $\widetilde{X}$ を X の**完備化 (completion)** という.

例 3.10 $X_0 := \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots); x_i \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}\}$ (有限個を除いて全て 0 である無限列全体) とおく. $\|x\| = \|x\|_{l^p}$ とおけば, X_0 はノルム空間となる. X_0 は l^p の部分空間で dense であるが, 完備ではない. 実際, $x^{(n)} = (1, 1/2, 1/2^2 \dots, 1/2^n, 0, 0, \dots)$ を考えると $m > n$ に対し, $1 \le p < \infty$ なら $\|x^{(n)} - x^{(m)}\|_{l^p} = (\sum_{k=n+1}^m 2^{-kp})^{1/p} \to 0\ (n \to \infty)$ で, Cauchy 列となるが, 極限は $x = (1, 1/2, 1/2^2 \dots, 1/2^n, \dots) \notin X_0$. ゆえに X_0 は完備でない. ($p = \infty$ でも同様.) X_0 の完備化 $\widetilde{X}_0$ は l^p と同一視できてノルムも等しい, i.e., l^p に等長である. これを踏まえて単に X_0 の完備化は l^p であるという.

注) ノルム空間 $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ に対し, $^\exists f : X \to Y$; 全単射な写像, $\|f(x)\|_Y = \|x\|_X$ のとき X は Y に**等長**であるという. (簡単に X と Y はノルム空間として同一視できるともいう.)

例 3.11 区間 $[0, 1]$ 上の多項式全体を X_0 とおく, i.e., $X_0 = \bigcup_{n\ge1} P_n[0, 1]$. $x \in X_0$ に対し, $\|x\| = \sup_{t\in[0,1]} |x(t)|$ とおくとノルムとなるが, X_0 は完備でない. X_0 の完備化は $C[0, 1]$ となる.

4 ヒルベルト空間 (Hilbert Spaces)

線形空間で**内積 (inner product)** $\langle x, y\rangle$ の入った空間を**内積空間 or プレ・ヒルベルト空間 (inner prod. sp. or pre-Hilbert sp.)** といい, さらに内積から決まるノルム $\|x\| = \sqrt{\langle x.x\rangle}$ で, 完備なものを**ヒルベルト空間 (Hilbert sp.)** という. これはまさに内積の入った $\mathbf{R}^n$ や $\mathbf{C}^n$ の抽象化で, 線形代数で習ったことと同様な性質を満たすが, さらに無限次元のときには多少の注意を要する.

4.1 プレ・ヒルベルト空間 (内積空間) (Pre-Hilbert sp. (Inner prod. sp.))

定義 4.1 X を $\mathbf{C}$ 上の線形空間, $x, y \in X$ に対し, $\langle x, y\rangle \in \mathbf{C}$ が内積 (inner product) とは

(正値性) $\langle x, x\rangle \ge 0\ (x \in X)$. また $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$.

(共役対称性) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}\ (x, y \in X)$

(準双線形性) $\langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle$, $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle\ (x_1, x_2, y \in X, \alpha \in \mathbf{C})$.

定義 4.2 内積の定義された線形空間 X or $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ を**プレ・ヒルベルト空間 (pre-Hilbert sp.)** or **内積空間 (inner prod. sp.)** という.

定理 4.1 プレ・ヒルベルト空間 X において, $\|x\| := \langle x, x\rangle^{1/2}$ $(x \in X)$ とおけば, ノルムの条件をみたす. 従って「 (内積空間) $\subset$ (ノルム空間)」が成り立つ.

この証明に次の不等式を用いる.

補題 4.1 (Schwartz の不等式) $|\langle x, y\rangle| \le \|x\|\|y\|$ $(x, y \in X)$.

証明 $\|y\| = 0$ なら $y = 0$ より, $\langle x, y\rangle = 0$ となり ($\to$ 下の問), 明らかなので, $\|y\| \neq 0$ とする. $^\forall\alpha \in \mathbf{C}$ に対し, $0 \le \langle x + \alpha y, x + \alpha y\rangle$ なので, $\alpha := -\langle x, y\rangle/\|y\|^2$ を代入すれば容易に分かる. 実際, $0 \le \langle x + \alpha y, x + \alpha y\rangle = \|x\|^2 + \overline{\alpha}\langle x, y\rangle + \alpha\overline{\langle x, y\rangle} + |\alpha|^2\|y\|^2 = \|x\|^2 - |\langle x, y\rangle|^2/\|y\|^2$. ■

問 $y = 0$ なら $\langle x, y\rangle = 0$ を Schwartz の不等式を用いずに示せ. ($\langle x, y\rangle = \langle x, 0y\rangle = 0\langle x, y\rangle = 0$)

[定理 4.1 の証明] 三角不等式をみたすことを示せば良い. 上の不等式より, $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \|y\|^2 \le \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$. ■

定理 4.2 X が内積空間なら $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ に対し, 次が成り立つ.

$$\textbf{中線定理} \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

また内積はノルムを用いて次で表せる.

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2\right).$$

逆にノルム空間 X において, 中線定理をみたすとき, 上の式によって $\langle x, y\rangle$ を定義すれば, 内積となる. 即ち, 「**ノルム空間 X が内積空間 $\iff$ 中線定理をみたす**」.

証明は前半の内積が中線定理をみたすのは容易に分かる. 逆のノルムが中線定理をみたすとき内積となることについては複雑なので, 補章に述べる.

命題 4.1 内積 $\langle x, y\rangle$ は x, y の連続関数, i.e., $x_n \to x, y_n \to y$ なら $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$.

Schwartz の不等式を用いれば明らか.

4.2 ヒルベルト空間 (Hilbert sp.)

定義 4.3 内積空間 X がその内積から決まるノルムで完備なとき **ヒルベルト空間 (Hilbert sp.)** という. また $K = \mathbf{R}$ なら**実ヒルベルト空間**, $K = \mathbf{C}$ なら**複素ヒルベルト空間**という.

[Hilber sps の例]

例 4.1 $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{C}^n$: 最初に定義した内積で, Hilbert となる.

例 4.2 l^2: $x = (x_n), y = (y_n) \in l^2$ に対し, $\langle x, y\rangle = \sum_{n\ge1} x_n\overline{y_n}$ とおけば, 内積となり, 前に定義したノルムに対し, $\|x\|_2^2 = \sum |x_n|^2 = \langle x, x\rangle$. 従って Hilbert となる.

例 4.3 $L^2(\Omega)$ ($\Omega \subset \mathbf{R}^n$ open): $u, v \in L^2(\Omega)$, $\langle u, v\rangle = \int_\Omega u(t)\overline{v(t)}dt$ とおけば Hilbert.

例 4.4 $A^2(\Omega)$ ($\Omega \subset \mathbf{C}$ open, $f \in A^2(\Omega)$ 正則, $\iint_\Omega |f(z)|^2 dxdy < \infty$ $(z = x+iy)$)
$f, g \in A^2(\Omega)$ に対し, $\langle f, g\rangle = \iint_\Omega f(z)\overline{g(z)}dxdy$ とおけば Hilbert. (この証明は補章で)

例 4.5 $C(\Omega)$ ($\Omega \subset \mathbf{R}^n$) において $L^2(\Omega)$ と同じ内積を定義すれば, これは内積空間とはなるが Hilbert にはならない.

4.3 射影定理 (Projection theorem)

H を Hilbert sp. $x, y \in H$, $A, B \subset H$ に対し,
・$x \perp y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \langle x, y\rangle = 0$.
・$A \perp B \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} {}^\forall a \in A, {}^\forall b \in B, a \perp b$. (特に $x \perp B \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \{x\} \perp B$.)
$L \subset H$ 部分集合に対し,
・$L^\perp := \{x \in H; x \perp L\}$ を L の**直交補空間 (orthogonal complement)** という.

問 4.1 任意の部分集合 $L \subset H$ に対し, $L^\perp$ が H の閉部分空間となることを示せ.

・$x \perp y \Longrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ **三平方の定理 (ピタゴラスの定理)**
・部分空間 $L_1, L_2 \subset H$ に対し, L_1, L_2 の**直和 (direct sum)** $L_1 \oplus L_2 := L_1 + L_2; L_1 \cap L_2 = \{0\}$.
ここで $[L_1 \cap L_2 = \{0\} \iff x = x_1 + x_2 \in L_1 + L_2$ の表現が一意的$]$ に注意.
問 このことを示せ.
[解] $(\Rightarrow)$ $x_1 + x_2 = x_1' + x_2'$ $(x_i, x_i' \in L_i)$ なら $x_1 - x_1' = x_2' - x_2 \in L_1 \cap L_2 = \{0\}$ より, $x_i = x_i'$. $(\Leftarrow)$ $x \in L_1 \cap L_2$ なら $x = x + 0 = 0 + x \in L_1 + L_2$ とみて, 表現の一意性から $x = 0$.

定理 4.3 (射影定理) $L \subset H$ が閉部分空間なら H は L と $L^\perp$ の直和に分解される; $H = L \oplus L^\perp$, i.e., ${}^\forall x \in H, {}^\exists y \in L, {}^\exists z \in L^\perp; x = y + z$ で, この表現は一意的.

上の $y \in L$ を $x \in H$ の L への**正射影** or **直交射影** or **射影** という. また $P_L x = y$ と表し, この P_L も L への**射影 (作用素)** という.
証明 $x \in L \cap L^\perp$ なら $\langle x, x\rangle = 0$ より, $x = 0$, i.e., $L \cap L^\perp = \{0\}$. これから表現は一意となる.
分解の可能性について. ${}^\forall x \in H$ を一つとり, $\delta := \inf_{y \in L} \|x - y\|$ とおく. inf の性質から ${}^\exists\{y_n\} \subset L; \|x - y_n\| \to \delta$. また中線定理より

$$\begin{aligned} 2(\|x-y_n\|^2 + \|x-y_m\|^2) &= \|(x-y_n)+(x-y_m)\|^2 + \|(x-y_n)-(x-y_m)\|^2 \\ &= \|2x - (y_n+y_m)\|^2 + \|y_n - y_m\|^2. \end{aligned}$$

ここで $(y_n+y_m)/2 \in L$ より, $\delta \le \|x - (y_n+y_m)/2\|$. 従って

$$\|y_n - y_m\|^2 = 2(\|x-y_n\|^2 + \|x-y_m\|^2) - 4\left\|x - \frac{y_n+y_m}{2}\right\|^2 \le 2(\|x-y_n\|^2 + \|x-y_m\|^2) - 4\delta^2$$

で (右辺)$\to 0$ $(m, n \to \infty)$. H の完備性より ${}^\exists y \in H; y_n \to y$. しかも L closed から $y \in L$. また $\delta = \|x - y\|$ も成り立つ. $z = x - y$ とおく $(\|z\| = \delta)$. $z \perp L$ を示す. $\xi \in L$ に対し, $\gamma = \langle z, \xi\rangle$ として,

$\varphi(t) = \|z - \gamma t\xi\|^2 = \|x - (y + \gamma t\xi)\|^2$ $(t \in \mathbf{R})$ とおく. まず $y + \gamma t\xi \in L$ より, $\varphi(t) \geq \delta^2 = \varphi(0)$ (δ の定義による). さらに

$$\varphi(t) = \|z\|^2 - \overline{\gamma}t\langle z, \xi\rangle - \gamma t\langle \xi, z\rangle + |\gamma|^2t^2\|\xi\|^2 = \delta^2 - 2|\gamma|^2t + |\gamma|^2t^2\|\xi\|^2 = \delta^2 - |\gamma|^2t(2 - t\|\xi\|^2).$$

もし $\gamma \neq 0$ なら, $t > 0$ が 0 に十分近いとき, $2 - t\|\xi\|^2 > 0$ より, $\varphi(t) < \varphi(0) = \delta^2$ となり矛盾. よって $\gamma = 0$. ■

例 4.6 $H = L^2(\Omega)$ ($\Omega \subset \mathbf{R}^n$: bdd open) において, $u \in L \overset{\text{def}}{\iff} u \in H; \int_\Omega u(t)dt = 0$ とおけば, L は閉部分空間で, $P_L u(t) = u(t) - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(t)dt$. 更に $L^\perp = \{$ 定数関数 $\}$.

例 4.7 $H = L^2(-1, 1)$ において $u \in L \overset{\text{def}}{\iff} u \in H; u(-t) = u(t)$ とおくと L は閉部分空間で, $L^\perp = \{v \in H; v(-t) = -v(t)\}$.

問 4.2 上の 2 つの例を確かめよ. (最初の例は, $M = \{$ 定数関数 $\}$ として, $L \subset M^\perp$, $L \supset M^\perp$ を. 後のは, $[0, 1)$ 上の積分にして, $u(t) = v(t) + v(-t)$ ととる.)

4.4 正規直交系 (ONS=orthonormal system)

・$\{x_k\} \subset H$: **正規直交系 (ONS)** $\overset{\text{def}}{\iff} \langle x_j, x_k\rangle = \delta_{jk}$.

例 4.8 $L^2(0, 1)$ において $\{\sqrt{2}\sin(\pi kt)\}_{k=1}^\infty$, $\{e^{2\pi kti}\}_{k=0}^\infty$ はそれぞれ正規直交系.

命題 4.2 $\{x_k\} \subset H$: ONS なら $^\forall x \in H$, $\sum_k |\langle x, x_k\rangle|^2 \leq \|x\|^2$ (**Bessel の不等式**).

証明 $x \in H$ に対し, $\alpha_k = \langle x, x_k\rangle$ とおく. $^\forall n \in \mathbf{N}$ に対し,

$$\begin{aligned} 0 \leq \|x - \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k\|^2 &= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n \overline{\alpha_k}\langle x, x_k\rangle - \sum_{k=1}^n \alpha_k\langle x_k, x\rangle + \sum_{j,k=1}^n \alpha_j\overline{\alpha_k}\langle x_j, x_k\rangle \\ &= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2 \end{aligned}$$

よって $\sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2 \leq \|x\|^2$. 後は $n \to \infty$ とすれば良い. ■

・$\{x_k\} \subset H$ に対し, $\langle\{x_k\}\rangle := \left\{\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k;\ \alpha_k \in K, n \in \mathbf{N}\right\}$ とおき, $L := \overline{\langle\{x_k\}\rangle}$ を $\{x_k\}$ **で生成される閉部分空間**という. (この upper bar は閉包を表す.)

定理 4.4 $\{x_k\} \subset H$: ONS, $L = \overline{\langle\{x_k\}\rangle}$: $\{x_k\}$ で生成される閉部分空間とする. 次は同値.

(i) $L = H$

(ii) $^\forall x \in H$, $x = \sum_k \langle x, x_k\rangle x_k$ (**一般化された Fourier 級数**)

(iii) $^\forall x, y \in H$, $\langle x, y\rangle = \sum_k \langle x, x_k\rangle\overline{\langle y, x_k\rangle}$ (絶対収束).

(iv) $^\forall x \in H$, $\|x\|^2 = \sum_k |\langle x, x_k\rangle|^2$ (**Perseval の等式**).

(v) $^\forall k, \langle x, x_k\rangle = 0$ なら $x = 0$.

証明 まず (i) $L = H \iff L^\perp = \{0\}$ (by Proj. Th.) に注意しておく.

[(i) $\Rightarrow$ (ii)] $x \in H$ をとり, $\alpha_k = \langle x, x_k \rangle$ とおくと Bessel の不等式より, $\sum_k |\alpha_k|^2 \le \|x\|^2$, 即ち, 左辺は収束. 従って $m > n$ に対し,

$$\left\| \sum_{k=1}^m \alpha_k x_k - \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k \right\|^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^m \alpha_k x_k \right\|^2 = \sum_{k=n+1}^m |\alpha_k|^2 \to 0 \quad (m > n \to \infty).$$

よって $\{\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k\}$ は Cauchy in H. 完備性から $^\exists y = \sum_{k=1}^\infty \alpha_k x_k \in H$. さらに内積の連続性を用いれば $\langle x - y, x_k \rangle = \langle x, x_k \rangle - \langle \sum_n \alpha_n x_n, x_k \rangle = \alpha_k - \sum_n \alpha_n \langle x_n, x_k \rangle = \alpha_k - \alpha_k = 0$. これから $(x - y) \perp \langle \{x_k\} \rangle$, さらに再び, 内積の連続性と仮定から $(x - y) \perp \overline{\langle \{x_k\} \rangle} = L = H$. 従って $x - y = 0$, i.e., $x = y$.

[(ii) $\Rightarrow$ (iii)] $x, y \in H$ に対し, $\alpha_k = \langle x, x_k \rangle, \beta_k = \langle y, x_k \rangle$ とおく. Schwartz の不等式と Bessel の不等式より

$$\sum_{k=1}^n |\alpha_k \overline{\beta_k}| \le \left(\sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n |\beta_k|^2 \right)^{1/2} \le \|x\| \|y\|.$$

$n \to \infty$ とすれば $\sum_{k=1}^\infty \alpha_k \overline{\beta_k}$ が絶対収束することが分かる. 従って

$$\langle x, y \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k, \sum_{k=1}^n \beta_k x_k \rangle = \sum_{k=1}^\infty \alpha_k \overline{\beta_k}.$$

[(iii) $\Rightarrow$ (iv)], [(iv) $\Rightarrow$ (v)] 共に明らか.

[(v) $\Rightarrow$ (i)] $x \in L^\perp$ なら $^\forall k \ge 1, \langle x, x_k \rangle = 0$. 仮定より $x = 0$ で, $L^\perp = \{0\}$ となる. よって射影定理より $H = L$. ■

定義 4.4 H の正規直交系 $\{x_k\}$ が上の定理のいずれかをみたすとき, **完全正規直交系 (complete ONS=CONS)** という.

例 4.9 l^2 において $e_j = (\delta_{j,n})_{n \ge 1}$ (j 成分のみ 1, 他は 0) とおくと $\{e_j\}$ は CONS.

例 4.10 $H = L^2(-\pi, \pi)$ において, $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nt, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nt \right\}_{n=1}^\infty$ は CONS. このとき $^\forall x \in H$ に対し,

$$x(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^\infty (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \quad \left(a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi x(t) \cos nt dt,\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi x(t) \sin nt dt \right)$$

と展開できる, これを **Fourier 級数**といい, a_n, b_n を **Fourier 係数**という.

問 4.3 上の 2 つの例を証明せよ.

[Schmidt の直交化法] $\{y_k\} \subset H$ を一次独立とする. このとき

$$e_1 \equiv x_1 := y_1 / \|y_1\|, \quad e_n = x_n / \|x_n\| \quad \text{with} \quad x_n = y_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle y_n, e_k \rangle e_k \quad (n \ge 2)$$

とおく. $\{e_k\}$ は ONS となる. この構成法を **Schmidt の直交化法** という.

問 $\{e_k\}$ が ONS となることを確かめよ.

定理 4.5 可分な Hilbert 空間 H には可算個の元からなる CONS が存在する.

証明 H の可算稠密部分 $\{z_k\}$ から一次独立な $\{y_n\}$ を順に抜き出す. これから Schmidt の直交化法で, 正規直交系 $\{e_n\}$ を作ればこれが求めるものとなる. 実際, $\forall n, \langle x, e_n\rangle = 0$ なら $x = 0$ となることが容易に示せて, 前定理から CONS であることが分かる. ■

定理 4.6 プレ・ヒルベルト空間の完備化はヒルベルト空間となる.

証明 H をプレ・ヒルベルト空間とする. ノルム空間としての完備化 $\overline{H}$ において内積を拡張できれば良い. $x, y \in \overline{H}$ に対し, $\exists x_n, y_n \in H; x_n \to x, y_n \to y$. このとき $\{\langle x_n, y_n\rangle\}$ は Cauchy 列となることが分かる (Schwartz と $\{\|x_n\|\}, \{\|y_n\|\}$ の有界性を用いる). そこで $\langle x, y\rangle := \lim\langle x_n, y_n\rangle$ とおけば, 求める内積となる. (実際, これが近似列 $\{x_n\}, \{y_n\} \subset H$ の取り方に寄らないことが言えて, しかも $\overline{H}$ 上に拡張された内積となることも分かる.) ■

5 線形作用素 (Linear Operators)

定義 5.1 X, Y 線形空間, $D \subset X$ 部分空間, 写像 $T : D \to Y$ が**線形 (linear)** とは

$$\text{(i) } T(x_1 + x_2) = Tx_1 + Tx_2 \quad (x_1, x_2 \in D), \qquad \text{(ii) } T(\alpha x) = \alpha Tx \quad (\alpha \in K, x \in D)$$

関数解析においては「線形写像＝**線形作用素 (linear operator)**」という. $D(T) := D$ を T の**定義域 (domain)**, $R(T) := T(D)$ を T の**値域 (range)** という. また $Y = X$ のとき T を単に **X の中への線形作用素**という.

定義 5.2 X, Y normed sps, lin. op. $T : D(T) \subset X \to Y$ が
(i) **有界作用素 (bounded operator)** $\overset{\text{def}}{\iff} \exists M; \|Tx\| \le M\|x\|\ (x \in D(T))$.
(ii) **連続作用素 (conti. operator)** $\overset{\text{def}}{\iff} x_n \to x$ in $D(T)$ なら $Tx_n \to Tx$.

定理 5.1 X, Y normed sps, $T : D(T) \subset X \to Y$ 線形作用素が「連続 $\iff$ T が有界」

証明 $(\Rightarrow)$ 背理法で示す. もし, $\forall n \ge 1, \exists x_n \in D(T); \|Tx_n\| > n\|x_n\|$ とすると $y_n := x_n/(\sqrt{n}\|x_n\|)$ に対し, $\|y_n\| = 1/\sqrt{n}$ より, $y_n \to 0$. 一方, $\|Ty_n\| = \|Tx_n\|/(\sqrt{n}\|x_n\|) > \sqrt{n} \to \infty$ となり, T の連続性に反する. よって T は有界.
$(\Leftarrow)$ $x_n \to x$ in $D(T)$ とする. 仮定より, $\|Tx_n - Tx\| = \|T(x - x_n)\| \le M\|x_n - x\| \to 0$ となり, $Tx_n \to Tx$ を得て, T は連続. ■

X, Y normed sps に対し,

$$T \in \mathcal{L}(X, Y) \overset{\text{def}}{\iff} D(T) = X \text{ で } T : X \to Y; \text{bdd lin. op. また } \mathcal{L}(X) := \mathcal{L}(X, X).$$

今後, 特に断らない限り, 有界作用素 $T : X \to Y$ は $D(T) = X$ を仮定する.

$X^* := \mathcal{L}(X, K)$ を X の**共役空間 (conjucate sp.)**, その元を線形連続汎関数 (lin. conti. functional) という.

$T \in \mathcal{L}(X,Y)$ に対し, その**作用素ノルム (operator norm)** を次で定義する.

$$\|T\| := \sup_{x \in X\setminus\{0\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|.$$

明らかに $\|Tx\| \le \|T\|\|x\|$ が成り立つ. $(\to$ 問: 確かめよ.)

定理 5.2 X を normed sp., Y を Banach sp. とする. $\mathcal{L}(X,Y)$ は作用素ノルム $\|T\|$ のもとで Banach sp. である.

証明 $\{T_n\} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ を Cauchy 列とする, i.e., $\|T_n - T_m\| \to 0$ $(m,n\to\infty)$. ${}^\forall x \in X, \|T_nx - T_mx\| \le \|T_n - T_n\|\|x\| \to 0$ より, $\{T_nx\}$ は Cauchy in Y. Y: 完備から, ${}^\exists y \in Y; T_nx \to y$. この y は x に依存して決まるので $Tx = y$ とおけば, 線形作用素なることは容易に分かる. 今, ${}^\forall\varepsilon > 0$ に対し, n,m 十分大なら, $\|T_n - T_m\| < \varepsilon$ より, $\|T_nx - T_mx\| \le \|T_n - T_n\|\|x\| \le \varepsilon\|x\|$ で, $m \to \infty$ として $\|T_nx - Tx\| \le \varepsilon\|x\|$ をえる. 従って, $\|Tx\| \le \|Tx - T_nx\| + \|T_nx\| \le (\varepsilon + \|T_n\|)\|x\|$ となり, $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. また $\|T_n - T\| \le \varepsilon$ も成り立つので, $T_n \to T$ in $\mathcal{L}(X,Y)$. 故に $\mathcal{L}(X,Y)$ は完備. ∎

5.1 有界作用素の例 (Examples of bounded operators)

例 5.1 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ を開集合, $k(t) \in L^\infty(\Omega)$, $1 \le p \le \infty$ とする. $x \in L^p(\Omega)$ に対し, $(Tx)(t) = k(t)x(t)$ $(t \in \Omega)$ とおくと T は $L^p(\Omega)$ の中への有界線形作用素で, $\|T\| = \|k\|_\infty$.

問 5.1 上の例を証明せよ. (まず, $\|k\|_\infty = 0$ なら明らか. > 0 として良い. $\|T\| \le \|k\|_\infty$ は明らか. 逆は ${}^\forall\varepsilon > 0$, $\Omega_\varepsilon = \{|k| > \|k\|_\infty - \varepsilon\}$ とおけば, Ω_ε は可測, かつ $|\Omega_\varepsilon| > 0$ で, $x(t) := |\Omega_\varepsilon|^{-1/p}1_{\Omega_\varepsilon}(t)$ を考えれば良い. 但し, もし $|\Omega_\varepsilon| = \infty$ なら, $\{|t| \le n\}$; n: 十分大, に制限して考える.)

例 5.2 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ を開集合, $k(t,s) \in L^2(\Omega^2)$, i.e., $\displaystyle\int_{\Omega^2} |k(t,s)|^2 dtds < \infty$ とする. $x \in L^2(\Omega)$ に対し, $\displaystyle(Tx)(t) = \int_\Omega k(t,s)x(s)ds$ とおくと T は有界線形作用素で, $\displaystyle\|T\| \le \left(\int_{\Omega^2} |k(t,s)|^2 dtds\right)^{1/2}$. 上の k を**ヒルベルト・シュミット型の核**, T を**ヒルベルト・シュミット型積分作用素**という.

証明 Schwartz の不等式より,

$$|(Tx)(t)| \le \int_\Omega |k(t,s)||x(s)|ds \le \left(\int_\Omega |k(t,s)|^2 ds\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |x(s)|^2 ds\right)^{1/2}.$$

よって $\displaystyle|(Tx)(t)|^2 \le \int_\Omega |k(t,s)|^2 ds \cdot \|x\|_{L^2}^2$. これをさらに t で積分すると左辺は $\|Tx\|_{L^2}^2$ となり, それから求める不等式を得る. ∎

例 5.3 (畳込み作用素) $\rho \in L^1(\mathbf{R}^n)$ とする. $1 \le p \le \infty$ とし, $x \in L^p(\mathbf{R}^n)$ に対し,

$$(Tx)(t) = (\rho * x)(t) := \int_{\mathbf{R}^n} \rho(t-s)x(s)ds = \int_{\mathbf{R}^n} \rho(s)x(t-s)ds$$

とおくと T は $L^p(\mathbf{R}^n)$ から $L^p(\mathbf{R}^n)$ への有界線形作用素となり, $\|Tx\|_{L^p} \le \|\rho\|_{L^1}\|x\|_{L^p}$. この $T = \rho * x$ を ρ による**畳込み作用素 (convolution op.)** という.

証明 $p=1,\infty$ のときは容易に分かる．$1<p<\infty$ として q を p の共役指数 $(1/p+1/q=1)$ とする．$|\rho(t-s)x(s)|=(|\rho(t-s)|^{1/p}|x(s)|)|\rho(t-s)|^{1/q}$ に Hölder の不等式を適応して,

$$|(Tx)(t)|\le\left(\int|\rho(t-s)||x(s)|^pds\right)^{1/p}\left(\int|\rho(s)|ds\right)^{1/q}=\left(\int|\rho(t-s)||x(s)|^pds\right)^{1/p}\|\rho\|_{L^1}^{1/q}.$$

両辺を p 乗して, t で積分すると,

$$\|Tx\|_{L^p}^p\le\|\rho\|_{L^1}^{p/q}\int dt\int|\rho(t-s)||x(s)|^pds=\|\rho\|_{L^1}^{p/q+1}\|x\|_{L^p}^p.$$

$p/q+1=p(1/q+1/p)=p$ より, 求める不等式を得る. ■

5.2 逆作用素 (Inverse operators)

有界作用素 $T\in\mathcal{L}(X,Y)$ に対し, $^\exists S\in\mathcal{L}(Y,X);TS=I_Y,ST=I_X$ のとき S を T の**逆作用素 (inv. op.)** といい, T^{-1} と表す.

$T\in\mathcal{L}(X)$ と $y\in X$ が与えられたとき, $(I-T)x=y$ をみたす解 $x\in X$ が存在するかどうかは一つの重要な問題となるが, 次の定理は $(I-T)^{-1}$ の存在のための一つの十分条件となる.

定理 5.3 X: Banach, $T\in\mathcal{L}(X)$ とする．もし $\|T\|<1$ なら $R(I-T)=X$ で, $^\exists(I-T)^{-1}\in\mathcal{L}(X)$; $(I-T)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}T^n=I+T+T^2+\cdots$ $(T^0=I)$．この級数を**ノイマン級数 (Neumann series)** といい, $\mathcal{L}(X)$ の作用素ノルムで収束する．しかも $\|(I-T)^{-1}\|\le\sum_{n=0}^{\infty}\|T^n\|\le1/(1-\|T\|)$ をみたす．さらに仮定の $\|T\|<1$ を $\sum_{n=0}^{\infty}\|T^n\|<\infty$ に代えても, 最後の不等式を除き, 同じ結果を得る．最後の不等式は $\|(I-T)^{-1}\|\le\sum_{n=0}^{\infty}\|T^n\|<\infty$ となる.

証明 $\|T\|<1$ なら $\sum_{n=0}^{\infty}\|T^n\|\le\sum_{n=0}^{\infty}\|T\|^n=1/(1-\|T\|)<\infty$ が成り立つので, 初めからこの仮定のもとで示せば良い．X が完備なので, $\mathcal{L}(X)$ も完備であることに注意.

$$\left\|\sum_{k=0}^{n}T^k-\sum_{k=0}^{m}T^k\right\|\le\sum_{k=m+1}^{n}\|T^k\|\quad\to0\quad(n>m\to\infty)$$

より, $\sum_{k=0}^{n}T^k$ は $\mathcal{L}(X)$ の Cauchy 列で, 完備性から $^\exists S=\sum_{k=0}^{\infty}T^k\in\mathcal{L}(X)$．しかも

$$TS=ST=\sum_{n=0}^{\infty}T^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}T^n-I=S-I$$

より, $(I-T)S=S(I-T)=I$, i.e., $^\exists(I-T)^{-1}=S=\sum_{n=0}^{\infty}T^n$．最後の不等式も
$\|(I-T)^{-1}\|\le\sum_{n=0}^{\infty}\|T^n\|$ から明らか. ■

例 5.4 (フレドホルム型積分作用素) $-\infty < a < b < \infty$, $y \in C[a,b]$ とする.

$$y(t) = x(t) - \int_a^b k(t,s)x(s)ds$$

の解 $x \in C[a,b]$ を求めてみる. ここで $k(t,s) \in C([a,b]^2)$ で, $M := \max_{t,s\in[a,b]} |k(t,s)|$ に対し, $M(b-a) < 1$ をみたすとする. $(X, \|\cdot\|) := (C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ として $x \in X$ に対し,

$$(Kx)(t) = \int_a^b k(t,s)x(s)ds$$

とおけば, $K \in \mathcal{L}(X)$ で, $\|Kx\| \le M(b-a)\|x\|$, i.e., $\|K\| \le M(b-a) < 1$ をみたす. 方程式は $y = (I-K)x$ と表せて, 上の定理より $^\exists(I-K)^{-1}; x = (I-K)^{-1}y = y + Ky + K^2y + \cdots$. そこで

$$k_1(t,s) = k(t,s), \quad k_n(t,s) = \int_a^b k_1(t,r)k_{n-1}(r,s)dr \ (n \ge 2)$$

とおけば

$$|k_n(t,s)| \le M^n(b-a)^{n-1}, \quad K^n y(t) = \int_a^b k_n(t,s)y(s)ds$$

をみたすことが帰納的に分かる. 従って $h(t,s) := \sum_{n\ge1} k_n(t,s)$ とおけば, これは一様収束し, $h(t,s) \in C([a,b]^2)$ となり,

$$x(t) = y(t) + \sum_{n=1}^\infty \int_a^b k_n(t,s)y(s)ds = y(t) + \int_a^b h(t,s)y(s)ds$$

問 5.2 上の例で $x \in C[a,b]$ なら $Kx \in C[a,b]$ を示せ.

例 5.5 (ボルテラ型積分作用素) 上の例の設定で, 積分を t までに変えたものを考える.

$$y(t) = x(t) - \int_a^t k(t,s)x(s)ds$$

の解 $x \in C[a,b]$ を求めてみる. 但し, 条件 $M(b-a) < 1$ は取り除く. このときも上と同様に解 x を求めることができる. 実際, $(Kx)(t) = \displaystyle\int_a^t k(t,s)x(s)ds$ として

$$k_1(t,s) = k(t,s), \quad k_n(t,s) = \int_s^t k_1(t,r)k_{n-1}(r,s)dr \ (n \ge 2)$$

とおけば

$$|k_n(t,s)| \le M^n \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} \le M^n \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} \quad \text{かつ} \quad K^n y(t) = \int_a^t k_n(t,s)y(s)ds$$

をみたすことが帰納的に示せる. さらに $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \|K^n\| \le \sum_{n=1}^\infty M^n \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} < \infty$ で, 上の定理の後半の結果から $^\exists(I-K)^{-1}; x = (I-K)^{-1}y = y + Ky + K^2y + \cdots$. しかも $h(t,s) := \sum_{n\ge1} k_n(t,s)$ は一様収束し, $h(t,s) \in C([a,b]^2)$ で, $x(t) = y(t) + \displaystyle\int_a^t h(t,s)y(s)ds$.

問 5.3 上の例で $|k_n(t,s)| \le M^n(t-s)^{n-1}/(n-1)!$ を確かめよ.

6 三大基本原理 (一様有界性原理, 開写像定理, 閉グラフ定理)

ここでは関数解析学の基本原理と呼ばれる 3 つの定理, 「一様有界性原理」, 「開写像定理」, 「閉グラフ定理」について述べる. その基本となるのが次の定理である.

定理 6.1 (ベールのカテゴリー定理 (Baire's category theorem)) (X,d) を完備な距離空間, $X_n \subset X$ を閉集合とする $(n \geq 1)$. もし $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ なら, 少なくとも 1 つの X_n は X の開球を含む, i.e., X のある開球 $^{\exists}B \subset {}^{\exists}X_n$.

証明 背理法で示す. どの X_n も開球を含まないとする. まず X_1 が開球を含まないので $X_1 \neq X$ (X はどんな開球でも含むから). $^{\exists}x_1 \in X \setminus X_1$. X_1 closed より, $d_1 := d(x_1, X_1) = \inf_{x\in X_1} d(x_1,x) > 0$. そこで $\rho_1 := 1 \wedge (d_1/2) \leq 1$, $B_1 := B(x_1,\rho_1)$ とおくと $\overline{B_1} \cap X_1 = \emptyset$. 次に X_2 が開球を含まない閉集合であるから, $^{\exists}x_2 \in B_1 \setminus X_2$, $d_2 := d(x_2,X_2) > 0$. また $x_2 \notin X \setminus B_1$ (閉) より, $d_2' := d(x_2, X\setminus B_1) > 0$. そこで $\rho_2 := \min\{1/2, d_2/2, d_2'/2\} \leq 1/2$, $B_2 := B(x_2,\rho_2)$ とおくと $B_2 \subset B_1$, $\overline{B_2} \cap X_2 = \emptyset$. 以下同様にして $B_1 \supset B_2 \supset \cdots$, $\overline{B_k} \cap X_k = \emptyset$, $\rho_k \leq 1/k$ をみたす開球列 $\{B_k\}$ が構成できる. このとき B_k の中心 x_k は $k < m$ なら $d(x_k,x_m) \leq \rho_k \leq 1/k$ より, Cauchy 列. X の完備性から $^{\exists}x \in X; x_k \to x$. しかも $^{\forall}k, x \in \overline{B_k}$ で $\overline{B_k} \cap X_k = \emptyset$ より, $x \notin X_k$, i.e., $x \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$ となり, $\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k = X$ に反する. ■

6.1 一様有界性原理 (Uniform bounded principle)

定理 6.2 (一様有界性原理) X を Banach sp., Y を normed sp. とする. $\{T_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ に対し,

$$^{\forall}x \in X, \sup_{\lambda\in\Lambda} \|T_\lambda x\| < \infty \quad \Longrightarrow \quad \sup_{\lambda\in\Lambda} \|T_\lambda\| < \infty.$$

証明 $X_n := \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \{x \in X; \|T_\lambda x\| \leq n\}$ とおけば T_λ の連続性から X_n は閉集合で, さらに仮定から $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$ をみたす. X の完備性と Baire のカテゴリー定理より, ある X_{n_0} は開球を含む, i.e., $^{\exists}x_0 \in X, \rho_0 > 0; B(x_0,\rho_0) \subset X_{n_0}$. $^{\forall}y \in B(0,\rho_0), y + x_0 \in B(x_0,\rho_0)$ より, $y = (y+x_0) - x_0$ とみて $\|T_\lambda y\| \leq \|T_\lambda(y+x_0)\| + \|T_\lambda x_0\| \leq 2n_0$. よって $^{\forall}x \in X$ に対し, $\mu = 2\|x\|/\rho_0$ とおけば $\|\mu^{-1}x\| = \rho_0/2 < \rho_0$ より $\mu^{-1}x \in B(0,\rho_0)$ となり, $\|T_\lambda x\| = \mu\|T_\lambda(\mu^{-1}x)\| \leq 2n_0\mu = 4n_0\|x\|/\rho_0$. これから, $\sup_\lambda \|T_\lambda\| \leq 4n_0/\rho_0$ をえる. ■

定理 6.3 (Banach-Steinhaus theorem) X を Banach sp., Y を normed sp. $\{T_n\} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ とする. $^{\forall}x \in X, \{T_n x\}$ が収束列で, $Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x$ とおくと $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ かつ $\|T\| \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \|T_n\|$.

証明 $\gamma := \underline{\lim}_{n\to\infty} \|T_n\|$ とおく. $\{T_n x\}$ が収束列より, $\sup_n \|T_n x\| < \infty$. X が Banach で, 一様有界性原理より $\sup_n \|T_n\| < \infty$. よって $\gamma < \infty$. $^{\forall}\varepsilon > 0$ に対し, $^{\exists}\{n_k\}; \|T_{n_k}\| \leq \gamma + \varepsilon$. またノルムの連続性から $^{\forall}x \in X$ に対し, $\|Tx\| = \lim_{k\to\infty} \|T_{n_k}x\| \leq (\gamma+\varepsilon)\|x\|$. よって $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ で, $\|T\| \leq \gamma + \varepsilon$. ε の任意性から $\|T\| \leq \gamma$. ■

6.2 開写像定理 (Open mapping theorem)

定理 6.4 (開写像定理) X, Y 共に Banach sps とする. $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ に対し, $R(T) = Y$ なら T は開写像, i.e., $^\forall U \subset X$; open, $T(U) \subset Y$; open.

証明 **(1st Step)** $^\exists \rho > 0; B_Y(0,\rho) \subset \overline{TB_X(0,1)}$ を示す. まず仮定の $R(T) = Y$ より, $Y = T(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} TB_X(0,n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{TB_X(0,n)}$ で, Y が完備なので Baire のカテゴリー定理より, $^\exists n \geq 1, a \in Y, \delta > 0; B_Y(a,\delta) \subset \overline{TB_X(0,n)}$. $^\forall y \in B_Y(0,\delta)$ をとる. $y + a, a \in B_Y(a,\delta) \subset \overline{TB_X(0,n)}$ より, $^\exists y_k, y'_k \in TB_X(0,n); y_k \to y + a, y'_k \to a$. よって $y_k - y'_k \in TB_X(0,2n)$ で, 極限をとれば, $y = (y+a) - a = \lim(y_k - y'_k) \in \overline{TB_X(0,2n)}$. 故に $B_Y(0,\delta) \subset \overline{TB_X(0,2n)}$. 従って $\rho = \delta/(2n)$ とおけば T の線形性から $B_Y(0,\rho) \subset \overline{TB_X(0,1)}$.

(2nd Step) 上の ρ に対し, $\eta = \rho/2 > 0$ として $B_Y(0,\eta) \subset TB_X(0,1)$ を示す. それには $B_Y(0,\rho) \subset TB_X(0,2)$, i.e, $^\forall y \in B_Y(0,\rho)$ に対し, $^\exists x \in B_X(0,2); y = Tx$ を言えば良い. $\varepsilon_k = 2^{-k}$ $(k \geq 0)$ として, 上のことから $B_Y(0,\varepsilon_k\rho) \subset \overline{TB_X(0,\varepsilon_k)}$. これから $y \in B_Y(0,\rho) \subset \overline{TB_X(0,1)}$ なら $^\exists x_{0,n} \in B_X(0,1); Tx_{0,n} \to y$ より, $^\exists x_0 \in B_X(0,1); \|y - Tx_0\| < \varepsilon_1\rho$. さらに $y - Tx_0 \in B_Y(0,\varepsilon_1\rho)$ で, 同様にして $^\exists x_1 \in B_X(0,\varepsilon_1); \|y - Tx_0 - Tx_1\| < \varepsilon_2\rho$. 以下, 同様に $^\exists x_k \in B_X(0,\varepsilon_k); \|y - \sum_{j=0}^{k} Tx_j\| < \varepsilon_{k+1}\rho$. ここで $\|\sum_{j=k}^{m} x_j\| \leq \sum_{j=k}^{m} \|x_j\| \leq \sum_{j=k}^{m} \varepsilon_j \to 0$ $(m > k \to \infty)$ より, $\{\sum_{j=0}^{k} x_j\}$ は Cauchy 列 in X で, 完備性から $^\exists x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \in X$. T が有界なので $Tx = \sum_{k=0}^{\infty} Tx_k$. また $\|x\| \leq \|x_0\| + \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \|x_0\| + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < 1 + 1 = 2$. よって $x \in B_X(0,2)$. $\|y - \sum_{j=0}^{k} Tx_j\| < \varepsilon_{k+1}\rho$ で $k \to \infty$ として $y = \sum_{k=0}^{\infty} Tx_k = Tx$.

(3rd Step) T は開写像, i.e., $^\forall U \subset X$; open, $T(U) \subset Y$; open を示す. 上の結果と T の線形性から, $^\forall \alpha > 0, B_Y(0,\alpha\eta) \subset TB_X(0,\alpha)$. $^\forall y_0 \in T(U)$ をとる. $^\exists x_0 \in U; y_0 = Tx_0$. U open より, $^\exists \delta > 0; x_0 + B_X(0,\delta) = B_X(x_0,\delta) \subset U$. $^\forall y \in B_Y(y_0,\delta\eta)$ をとり, $y' := y - y_0 \in B_Y(0,\delta\eta)$ とおく. 上で注意した $B_Y(0,\delta\eta) \subset TB_X(0,\delta)$ から $^\exists x' \in B_X(0,\delta); y' = Tx'$. よって $x_0 + x' \in U$ で, $y = y_0 + y' = Tx_0 + Tx' = T(x_0 + x') \in T(U)$. 故に $B_Y(y_0,\delta\eta) \subset T(U)$ となり, $T(U)$ は open. ■

定理 6.5 (値域定理 (range theorem)) X, Y 共に Banach sps. とする. $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ に対し, $R(T) = Y$ かつ T が 1 to 1 なら $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$.

証明 仮定より T^{-1} は存在し, Y から X への線形作用素であることは明らか. 連続であることを示せば良い. $^\forall U \subset X$; open に対し, $S := T^{-1}$ による原像 $S^{-1}(U) = \{y \in Y; Sy = T^{-1}y \in U\} = \{y \in Y; y \in T(U)\}$ は $T(U)$ に一致する. 開写像定理より, $T(U)$ も open. 即ち, $S^{-1}(U)$ が open となり, $S = T^{-1}$ は連続. よって $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$. ■

6.3 閉グラフ定理 (Closed graph theorem)

ここでは一般に, 線形作用素 T の定義域 $D(T) \neq X$ の場合も考える.

定義 6.1 $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ を normed sps. とする. T が X から Y への**閉作用素 (closed op.)** であるとは $T : D(T) \subset X \to Y$ は線形作用素で, T のグラフ $G(T) = \{(x, Tx) \in X \times Y; x \in D(T)\}$ がグラフノルム $\|(x, Tx)\|_G = \|x\|_X + \|Tx\|_Y$ で閉集合であるときをいう, つまり $x_n \in D(T) \to x$ in X, $Tx_n \to y$ in Y なら $(x, y) \in G(T)$, i.e., $x \in D(T)$ かつ $y = Tx$.

ここで $D = D(T)$ は単に部分空間で, T が連続 $\overset{\text{def}}{\iff}$ $x_n \to x$ in D なら $Tx_n \to Tx$ in Y で, これは T が D で有界と同値であったことに注意. 明らかに

定理 6.6 (i) $D(T)$ が closed で, $T : D(T) \subset X \to Y$ が有界 (= 連続) なら T は閉作用素. 特に $D(T) = X$ なら有界線形作用素は閉作用素.

(ii) Y が Banach で, $T : D(T) \subset X \to Y$ が有界ならば, T は $\overline{D(T)}$ 上に有界線形作用素 $\overline{T}$ として拡張でき, このとき, $\overline{T}$ は閉作用素となる.

(iii) X, Y が共に Banach のとき, T が閉作用素 $\iff$ $D(T)$ がノルム $\|x\|_G := \|x\|_X + \|Tx\|_Y$ で完備.

証明 (i) $x_n \in D(T) \to x \in X, Tx_n \to y \in Y$ なら $D(T)$ が closed より, $x \in D(T)$ で, 連続性から $y = Tx$, 故に T は閉作用素.

(ii) $x_n \in D(T) \to x \in X$ とする. 有界性から $\{Tx_n\}$ は Y の Cauchy 列となり, Y の完備性により $Tx_n \to {}^\exists y \in Y$. 従って $\overline{T}x := y$ と定義すれば, $\overline{T}$ は $\overline{D(T)}$ 上で有界で, $\overline{T} = T$ on $D(T)$, $\|\overline{T}\| = \|T\|$ をみたすことが容易に分かる. (i) より, $\overline{T}$ は閉作用素となる.

(iii) ($\Rightarrow$) $\{x_n\} \subset D(T); \|x_n - x_m\|_G \to 0$ $(m, n \to \infty)$ とする. X, Y の完備性から $x_n \to {}^\exists x$ in X, $Tx_n \to {}^\exists y$ in Y. 閉作用素の仮定から $x \in D(T), y = Tx$. よって $\|x_n - x\|_G = \|x_n - x\|_X + \|Tx_n - Tx\|_Y \to 0$ となり, $D(T)$ は完備.

($\Leftarrow$) $x_n \in D(T) \to x \in X$, $Tx_n \to y \in Y$ とすると $\{x_n\}$ は $D(T)$ において $\|\cdot\|_G$ のもと Cauchy 列となる. 完備性から ${}^\exists x^* \in D(T); \|x_n - x^*\|_G \to 0$. 極限の一意性から $x^* = x, Tx = Tx^* = y$ を得て, T closed となる. ■

これから $D(T)$ が closed か, もしくは Y が Banach ぐらいの条件があれば, 初めから T が連続なら閉作用素であると言って良いことになる. ではその逆はどうだろうか?

例 6.1 $X = C[0, 1]$, $D(T) = C^1[0, 1]$ として $(Tx)(t) = x'(t)$ とおけば, 閉作用素であるが, 有界作用素ではない.

定理 6.7 (閉グラフ定理) X, Y を Banach sps, T を X から Y への閉作用素とする. $D(T) = X$ なら $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

証明 $Z = G(T) = \{(x, Tx) \in X \times Y; x \in D(T) = X\}$ とおく. これは T が閉作用素であることと X, Y 共に Banach であることから, グラフノルム $\|(x, Tx)\|_Z := \|x\| + \|Tx\|$ のもと Banach となることが容易に分かる. $S : Z \to X; S(x, Tx) = x$ とおくと明らかに $S \in \mathcal{L}(Z, X)$ で, しかも

$R(S) = X$ かつ S は 1 to 1 となる．X も Banach なので, 値域定理より S^{-1} は有界作用素となる．よって $\|Tx\| \le \|(x, Tx)\|_Z = \|S^{-1}x\|_Z \le {}^\exists M\|x\|$. これは T の有界性, i.e., $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ を示している． ■

7 線形汎関数 (Linear Functionals)

既に定義したように normed sp X から $K = \mathbf{R}$ or $\mathbf{C}$ への有界線形作用素を**有界線形汎関数 (bdd lin. functional)** という．勿論, これは**連続線形汎関数 (conti. lin. functional)** と同値である．また有界線形汎関数の全体を $X^* := \mathcal{L}(X, K)$ と表し, X の**共役空間 (dual sp.)** という．このとき $K = \mathbf{R}$ or $\mathbf{C}$ が完備であるから, X^* も完備である．またこの元を普通 $f \in X^*$ で表す, i.e., $f : X \to K$; $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ $(\alpha, \beta \in K, x, y \in X)$, $\|f\| < \infty$.

7.1 共役空間 (Dual spaces)

X が Hilbert sp. H のとき, $H^* = H$ となる．従って $\mathbf{R}^n, \mathbf{C}^n, L^2(\Omega), l^2$ などの dual sps はそれぞれ自分自身となる．それが次の定理である．

定理 7.1 (リースの表現定理 (Riesz's representation theorem)) $X = H$ を Hilbert sp. とする．${}^\forall f \in H^*$ に対し, ${}^{\exists_1} y \in H; f(x) = \langle x, y\rangle$ $({}^\forall x \in H)$. しかも $\|f\| = \|y\|$ をみたす．これにより $H^* = H$ が成り立つ．

証明 $f \equiv 0$ なら $y = 0$ ととれば良い．$f \not\equiv 0$ とする．$N = \{x \in H; f(x) = 0\}$ とおくと閉部分空間となる．(実際, $x \in N, \alpha \in K$ なら $f(\alpha x) = \alpha f(x) = 0$ で, $\alpha x \in N$. $x, x' \in N$ なら $f(x + x') = f(x) + f(x') = 0$ より, $x + x' \in N$. よって部分空間となる．また $x_n \in N \to x \in H$ なら $f(x) = \lim f(x_n) = 0$ より $x \in N$. 故に N は閉.) 射影定理より $H = N \oplus N^\perp$. しかも $f \not\equiv 0$ より, $N^\perp \ne \emptyset$. $y_0 \in N^\perp; y_0 \ne 0$ を 1 つとる．$f(y_0) \ne 0$. $y := (\overline{f(y_0)}/\|y_0\|^2)y_0$ とおけば, $y \in N^\perp$ で, これが求めるものとなる．実際, ${}^\forall x \in H$ に対し, $f(y_0)x - f(x)y_0 \in N$ より,

$$0 = \langle f(y_0)x - f(x)y_0, y\rangle = f(y_0)\langle x, y\rangle - f(x)\langle y_0, y\rangle = f(y_0)(\langle x, y\rangle - f(x))$$

即ち, $f(x) = \langle x, y\rangle$. 一意性はもし ${}^\exists y' \in H; f(x) = \langle x, y\rangle = \langle x, y'\rangle$ とすると ${}^\forall x \in H, \langle x, y - y'\rangle = 0$ となり, $x = y - y'$ ととれば $\|y - y'\| = 0$, i.e., $y = y'$. よって y は一意．また $\|x\| = 1$ に対し, Schwartz より, $|f(x)| = |\langle x, y\rangle| \le \|x\|\|y\| = \|y\|$. 故に $\|f\| \le \|y\|$. 更に $x_0 = y/\|y\|$ として $f(x_0) = \langle x_0, y\rangle = \|y\|$ となるので $\|y\| = f(x_0) \le \sup_{\|x\|=1} |f(x)| = \|f\|$. 従って $\|f\| = \|y\|$. ■

一般の Banach sp. X において, X^* を定めるのは簡単ではないが, 次の例は良く知られている．

例 7.1 $1 \le p < \infty$ とする．q を p の共役指数とする, i.e., $1/p + 1/q = 1$ (但し, $p = 1$ なら $q = \infty$). (i) $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ を開集合として $(L^p(\Omega))^* = L^q(\Omega)$. (ii) $(l^p)^* = l^q$.

例 7.2 $l_0^\infty := \{(x_n) \in l^\infty; \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$ とおくと l_0^∞ は l^∞ の閉部分空間で $\|\cdot\|_\infty$ のノルムで Banach となり, しかも $(l_0^\infty)^* = l^1$.

7.2 ハーン・バナッハの拡張定理 (Hahn-Banach's extension thoerem)

定理 7.2 (ハーン・バナッハの拡張定理) X を実線形空間, $L \subset X$ を部分空間とする. f を L 上の実線形汎関数とする. このとき $^\exists p : X \to \mathbf{R}$; 実数値関数で, $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ $(\lambda > 0, x \in X)$, $p(x+y) \le p(x) + p(y)$ $(x, y \in X)$ をみたし, しかも $f \le p$ on L なら, $^\exists F \in X^* = \mathcal{L}(X, \mathbf{R})$; $F = f$ on L, $F \le p$ on X が成り立つ. 即ち, f は X 上に, 不等式 $f \le p$ を保ったまま実数値線形汎関数として拡張できる.

証明 $L = X$ なら明らかのなので, $L \ne X$ とする. $x_0 \in X \setminus L$ を一つとり, 実部分空間を $L_1 = L + \mathbf{R}x_0$ とおく. 次の手順で示す.

① $x = y + tx_0 \in L_1$ の表現は一意的.

f を L_1 上に, ある定数 $c \in \mathbf{R}$ を固定して, $F(x) = F(y + tx_0) := f(y) + tc$ と拡張する.

② F は L_1 上の線形汎関数.

③ 適当な c をとれば $F \le p$ on L_1.

④ Zorn の補題を用いて f が X 全体に $F \le p$ をみたすように拡張できる.

① L_1 が部分空間なることは明らかで, 表現の一意性は $x = y + tx_0 = y' + t'x_0$ $(y, y' \in L, t, t' \in \mathbf{R})$ とすると $0 = (y - y') + (t - t')x_0$, i.e, $(t - t')x_0 = y' - y \in L$. もし $t \ne t'$ なら $x_0 = (y' - y)/(t - t') \in L$ となり, 矛盾. 故に $t = t'$, さらに $y = y'$.

② $x_i = y_i + t_i x_0 \in L_1$ $(y_i \in L, t_i \in \mathbf{R})$ と $\alpha_i \in \mathbf{R}$ に対し, $F(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = F((\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) + (\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2)x_0) = f(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) + (\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2)c = \alpha_1(f(y_1) + t_1 c) + \alpha_2(f(y_2) + t_2 c) = \alpha_1 F(x_1) + \alpha_2 F(x_2)$.

③ まず $y, y' \in L$ に対し, $f(y)+f(y') = f(y+y') \le p(y+y') = p(y+x_0+y'-x_0) \le p(y+x_0)+p(y'-x_0)$ より, $f(y')-p(y'-x_0) \le p(y+x_0)-f(y)$. $\beta_1 := \sup_{y' \in L}(f(y')-p(y'-x_0))$, $\beta_2 := \inf_{y \in L}(p(y+x_0)-f(y))$ とおけば, $\beta_1 \le \beta_2$ よって $\beta_1 \le c \le \beta_2$ なる c をとれば, $f(y)+c \le p(y+x_0)$, $f(y')-c \le p(y'-x_0)$ $(y, y' \in L)$. これから $t > 0$ なら $F(x) = F(y+tx_0) = f(y)+tc = t(f(y/t)+c) \le tp(y/t+x_0) = p(y+tx_0) = p(x)$. さらに $t < 0$ なら $F(x) = F(y+tx_0) = f(y)+tc = (-t)(f(-y/t)-c) \le -tp(-y/t-x_0) = p(y+tx_0) = p(x)$. 最後に $t = 0$ なら $F(x) = F(y) = f(y) \le p(y) = p(x)$. 以上から $F \le p$ on L_1.

④ $g \in \Phi \overset{\text{def}}{\iff} g : L_g \to \mathbf{R}$; 線形汎関数, $L \subset L_g$, $g = f$ on L, $g \le p$ on L_g と定義する. 上で証明したことから $\Phi \ne \emptyset$ である. Φ に (半) 順序を導入する. $g, g' \in Phi$ に対し, $g \preceq g' \overset{\text{def}}{\iff} L_g \subset L_{g'}$, $g = g'$ on L_g とおけば順序となる. Φ の任意の全順序部分 $\{g_\lambda\}$ をとる. $L_\lambda := L_{g_\lambda}$ と表す. $L_0 := \bigcup L_\lambda$ として, g_0 on L_0 を $g_0 = g_\lambda$ on L_λ と定義すれば, $g_0 \in \Phi$ でしかも $\{g_\lambda\}$ の上界となることが容易に分かる. 従って Φ は帰納的順序集合となる. Zorn の補題により, $^\exists F \in \Phi$ 極大元, i.e, $g \in \Phi; F \preceq g$ なら $g = F$. 実はこの F が X 上で定義された求めるものとなっている. 実際, もしそうでなければ, 上で示したように F はさらに Φ の中で拡張できてしまう. これは F の極大性に反する. ■

定理 7.3 (拡張定理の複素型) X を複素線形空間, $L \subset X$ を部分空間とする. f を L 上の複素線形汎関数とする. このとき $^\exists p : X \to \mathbf{C}$; 複素数値関数で, $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ $(\lambda \in \mathbf{C}, x \in X)$, $p(x+y) \le p(x)+p(y)$ $(x, y \in X)$ をみたし, しかも $|f| \le p$ on L なら, $^\exists F \in X^* = \mathcal{L}(X, \mathbf{C})$; $F = f$ on L, $|F| \le p$ on X が成り立つ. 即ち, f は X 上に, 不等式 $f \le p$ を保ったまま複素数値線形汎関数として拡張できる.

証明 まず複素線形空間は実線形空間ともみなせることに注意. $f(x) = g(x)+ih(x)$ と実部・虚部に分ける. このとき g, h は実線形空間とみたときの L 上の実線形汎関数となる. しかも $g, h \le |f| \le p$ on L. よって前定理により g を X 上の実線形汎関数 $G; G \le p$ on X に拡張できる. しかも $-G(x) = G(-x) \le p(-x) = p(x)$

から $|G| \le p$. 今, $g(ix) + ih(ix) = f(ix) = if(x) = ig(x) - h(x)$ より, $h(x) = -g(ix)$. 従って $F(x) := G(x) - iG(ix)$ と定義すれば, これが求めるものとなる. 実際, $F = f$ on L と $F(x_1 + x_2) = F(x_1) + F(x_2)$ は明らかで, $F(ix) = G(ix) - iG(-x) = i(-iG(ix) + G(x)) = iF(x)$ と $a \in \mathbf{R}$ なら $F(ax) = aF(x)$ より, $\alpha \in \mathbf{C}$ に対しても $F(\alpha x) = \alpha F(x)$ をえる. また $F(x) = re^{i\theta}$ と表すと $F(e^{-i\theta}x) = e^{-i\theta}F(x) \in \mathbf{R}$ で, これは $G(e^{-i\theta}x)$ と等しいから, $|F(x)| = |e^{i\theta}F(x)| = |G(e^{-i\theta}x)| \le p(e^{-i\theta}x) = |e^{-i\theta}|p(x) = p(x)$. ■

系 7.1 X を実 (複素) ノルム空間, $L \subset X$ を部分空間とする. f を L 上の実 (複素) 連続線形汎関数とする. このとき $^\exists F \in X^*; F = f$ on L, $\|F\|_X = \|f\|_L$.

証明 $p(x) = \|f\|_L\|x\|$ とおけば拡張定理より, 容易に示せる. ■

系 7.2 X をノルム空間とする. $^\forall x_0 \in X, \ne 0$, $^\exists g \in X^*; g(x_0) = \|x_0\|, \|g\| = 1$.

証明 $L := \langle x_0 \rangle = \{tx_0; t \in K\}$ $f(x) = f(tx_0) := t\|x_0\|$ $(x = tx_0 \in L)$ として, 前定理を適用すれば良い. ちなみに $|f(x)| = |t|\|x_0\| = \|tx_0\| = \|x\|$ より $\|f\| = 1$. ■

系 7.3 X をノルム空間, $L \subsetneq X$ を部分空間とする. $x_0 \in X \setminus L$ をとり, $d := \inf_{y \in L} \|x_0 - y\| > 0$ と仮定する. このとき $^\exists f \in X^*; f = 0$ on L, $f(x_0) = 1$, $\|f\| \le 1/d$.

証明 $L_1 := L + \mathbf{R}x_0$ として $g(x) = t$ $(x = y + tx_0 \in L_1)$ とおけば $g = 0$ on L, $g(x_0) = 1$, $\|g\|_{L_1} \le 1/d$. よってこれに拡張定理を用いれば良い. ■

この先にも重要な概念, 定理が数多くある. **第 2 共役空間, 反射的 Banach sp., 弱収束, 共役作用素, レゾルベント, スペクトル, 完全連続作用素 (= compact 作用素)** などは, 実際に解析を研究していく上でも頻繁に現れる概念で, 一通り理解しておくことは必要である. しかし, これ以上は話す時間も無いので, 今後, 各自必要に応じて, 勉強してもらいたい.

付録 A 補充証明

本章では, 本文で述べられなった事実や証明について記す.

A.1 一般の測度空間での L^p の完備性

一般の測度空間 $(X,\mathcal{F},\mu)$ (X a set, $\mathcal{F}$ σ-field on X, $\mu=\mu(dx)$ 測度 on X) においても, Hölder の不等式, Minkovsky の不等式が証明できる.

$f\in L^p(X)$ (or $L^p(X,d\mu)$ or $L^p(X,\mathcal{F},\mu)$ などと表すこともある) を $\|f\|_{L^p}<\infty$ で定義する. 但し,

$$\|f\|_{L^p}=\left(\int_X |f(x)|^p\mu(dx)\right)^{1/p}\quad (1\le p<\infty),$$

$$\|f\|_\infty=\mathrm{ess.sup_{x\in X}|f(x)|}:=\inf\{\alpha;|\mathrm{f(x)}|\le\alpha\quad \mu\text{-a.e}\}.$$

とすることにより, 一般に $1\le p\le\infty$ に対し, $1\le q\le\infty$ を $1/p+1/q=1$ で定義する. 但し, $p=1$ のとき $q=\infty$, $p=\infty$ のとき $q=1$ と解釈する. **Hölder の不等式**が成り立つ.

$$\|fg\|_{L^1}\le\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q},\quad \|fg\|_{L^1}\le\|f\|_{L^1}\|g\|_\infty\quad (\|fg\|_{L^1}\le\|f\|_\infty\|g\|_{L^1}).$$

これを用いて **Minkovsky の不等式** $\|f+g\|_{L^p}\le\|f\|_{L^p}+\|g\|_{L^p}$ も示され, 従って $L^p(X)$ の完備性も証明できる.

特に $(X,\mathcal{F})=(\mathbf{N},2^{\mathbf{N}})$ として測度を $\mu=\sum_{n\ge1}\delta_n$ counting measure (計数測度) とすると, $\mathbf{N}$ 上の関数 $f(n)$ に対し, $\displaystyle\int_{\mathbf{N}} f(n)\mu(dn)=\sum_{n\ge1}f(n)$ となる. 特に無限数列 $x=(x_1,x_2,\dots)$ に対し, 関数を $f(n)=|x_n|^p$ とすると上式は $\displaystyle\sum_{n\ge1}|x_n|^p$ となる. このことから数列空間の l^p も Banach sp. であることも分かる.

A.2 ノルム空間の完備化の定理と証明について

定理 付録 A.1 X をノルム空間とする, このとき $^\exists\widetilde{X}$ Banach sp., $^\exists J:X\to\widetilde{X}$ 単射; $\|Jx\|=\|x\|$ $(x\in X)$, $J(X)$ dense in $\widetilde{X}$

$J(X)$ と X を同一視することにより, $X\subset\widetilde{X}$ かつ $\overline{X}=\widetilde{X}$ と思うことが出来る. この $\widetilde{X}$ を X の**完備化 (completion)** という.

証明 $\mathfrak{X}$ を X の Cauchy 列の全体とする. $\{x_n\},\{y_n\}\in\mathfrak{X}$ に対し, $\{x_n\}\sim\{y_n\}\iff x_n-y_n\to0$ $(n\to\infty)$ と定義する. これは同値関係となり, これによる同値類を $\widetilde{x}=[\{x_n\}]\in\widetilde{X}:=\mathfrak{X}/\sim$ と表す.

$\widetilde{x}=[\{x_n\}],\widetilde{y}=[\{y_n\}]\in\widetilde{X}$, $\alpha\in K$ に対し, $\alpha\widetilde{x}:=[\{\alpha x_n\}]$, $\widetilde{x}+\widetilde{y}:=[\{x_n+y_n\}]$ とおくことにより, $\widetilde{X}$ はベクトル空間となる. さらに $\widetilde{x}=[\{x_n\}]\in\widetilde{X}$ に対し, $|\|x_n\|-\|x_m\||\le\|x_n-x_m\|\to0$ より, $\{\|x\|\}$ は $\mathbf{R}$ での Cauchy 列となるので, $^\exists\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=:\|\widetilde{x}\|$ とおく. これにより $\widetilde{X}$ はノルム空間となる (確かめよ).

また $x\in X$ に対し, $x_n=x$ を考え, その同値類 $Jx:=[\{x_n=x\}]$ と x を同一視することにより, $X\subset\widetilde{X}$ とみなせる. 実際, $J:X\to\widetilde{X}$ は単射で, $\|Jx\|=\|x\|$ となる. また $^\forall\widetilde{x}\in\widetilde{X}$ に対し, その代表元の一つを $\{x_n\}$ とすると $^\forall\varepsilon>0,{}^\exists N;{}^\forall n,m\ge N,\|x_m-x_n\|<\varepsilon$ で, $n\ge N$ に対し, $Jx_n\in\widetilde{X}$ を考えると, $\widetilde{x}-Jx_n=[\{x_m-x_n\}_{m\ge1}]$ に注意して

$$\|\widetilde{x}-Jx_n\|=\lim_{m\to\infty}\|x_m-x_n\|\le\varepsilon$$

従って $\|\widetilde{x}-Jx_n\|\to 0$ $(n\to\infty)$. 即ち, $J(X)$ は dense in $\widetilde{X}$.

最後に $\widetilde{X}$ が完備なることについて. $\{\widetilde{x}_n\}$ を $\widetilde{X}$ での Cauchy 列とする. $\widetilde{x}_n$ の代表元を $\{x_k^{(n)}\}_{k\geq 1}$ と表すと Cauchy 列なることから ${}^{\exists}k_n; {}^{\forall}m>k_n, \|x_m^{(n)}-x_{k_n}^{(n)}\|\leq 1/n$. そこで $\widetilde{x}:=[\{x_{k_n}^{(n)}\}]$ とおけば, $\widetilde{x}\in\widetilde{X}$ で, これが $\{\widetilde{x}_n\}$ の極限となる. 実際, まず $\widetilde{x}\in\widetilde{X}$ については $\{x_{k_n}^{(n)}\}\in\mathfrak{X}$ (i.e., X での Cauchy 列なること) を示せば良い.

$$\|\widetilde{x}_n-Jx_{k_n}^{(n)}\|=\lim_{m\to\infty}\|x_{k_m}^{(n)}-x_{k_n}^{(n)}\|\leq\frac{1}{n}. \tag{付録 A.1}$$

よって

$$\begin{aligned}\|x_{k_n}^{(n)}-x_{k_m}^{(m)}\|&=\|Jx_{k_n}^{(n)}-Jx_{k_m}^{(m)}\|\leq\|Jx_{k_n}^{(n)}-\widetilde{x}_n\|+\|\widetilde{x}_n-\widetilde{x}_m\|+\|\widetilde{x}_m-Jx_{k_m}^{(m)}\|\\&\leq\|\widetilde{x}_n-\widetilde{x}_m\|+\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\to 0\quad(n,m\to\infty).\end{aligned}\tag{付録 A.2}$$

これから $\{x_{k_n}^{(n)}\}\in\mathfrak{X}$. さらに (付録 A.1) より,

$$\|\widetilde{x}-\widetilde{x}_n\|\leq\|\widetilde{x}-Jx_{k_n}^{(n)}\|+\|Jx_{k_n}^{(n)}-\widetilde{x}_n\|\leq\|\widetilde{x}-Jx_{k_n}^{(n)}\|+\frac{1}{n}.$$

また (付録 A.2) より,

$$\|\widetilde{x}-Jx_{k_n}^{(n)}\|=\lim_{p\to\infty}\|x_{k_p}^{(p)}-x_{k_n}^{(n)}\|\leq\lim_{p\to\infty}\|\widetilde{x}_p-\widetilde{x}_n\|+\frac{1}{n}$$

となる. 結局, この 2 つの式より,

$$\lim_{n\to\infty}\|\widetilde{x}-\widetilde{x}_n\|\leq\lim_{n\to\infty}\|\widetilde{x}-Jx_{k_n}^{(n)}\|\leq\lim_{n,p\to\infty}\|\widetilde{x}_p-\widetilde{x}_n\|=0,$$

即ち $\widetilde{x}_n\to\widetilde{x}$ in $\widetilde{X}$ となり, $\widetilde{X}$ は完備. ■

A.3 ソボレフ空間 $H^{k,p}(\Omega)$

$\Omega\subset\mathbf{R^n}$ 有界開集合として, $C^k(\Omega)$ k 回連続的微分可能な関数全体とする. 自然数の組 $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ (multi-index という) に対し, $|\alpha|:=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$, $\partial_x^\alpha:=\partial_1^{\alpha_1}\cdots\partial_n^{\alpha_n}$ とおく. 但し, $\partial_j=\partial/\partial_{x_j}$ である. このとき

$$C^{k,p}(\Omega):=\left\{u\in C^k(\Omega);\|u\|_{k,p}:=\left(\sum_{\alpha;|\alpha|\leq k}\int_\Omega|\partial_x^\alpha u(x)|^p dx\right)^{1/p}<\infty\right\}$$

とおく. この $(C^{k,p}(\Omega),\|\cdot\|_{k,p})$ の完備化を $H^{p,k}(\Omega)$ と表し, **Sobolev sp.** という.

$\{u_n\}$ Cauchy 列 in $C^{k,p}(\Omega)$ $\iff$ ${}^{\forall}\alpha; 1\leq|\alpha|\leq k$, $\displaystyle\int_\Omega|\partial_x^\alpha u_n(x)-\partial_x^\alpha u_m(x)|^p dx\to 0$ $(m,n\to\infty)$. $L^p(\Omega)$ の完備性より, ${}^{\exists}u^\alpha\in L^p(\Omega)$; $\displaystyle\int_\Omega|\partial_x^\alpha u_n(x)-\partial_x^\alpha u^\alpha(x)|^p dx\to 0$ $(n\to\infty)$. このベクトル $(u^\alpha)_{|\alpha|\leq k}$ は一意的に決まるので $H^{p,k}(\Omega)$ の元と同一視し, また形式的に $u^\alpha=\partial_x^\alpha u$ と表す.

A.4 ワイエルシュトラスの多項式近似

定理 付録 A.2 有界閉区間 $[a,b]$ 上の任意の連続関数 $f(t)$ は多項式 $P_n(t)$ で一様に近似できる, i.e., ${}^{\exists}\{P_n(t)\}; P_n\rightrightarrows f$ on $[a,b]$, i.e., $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in[a,b]}|P_n(t)-f(t)|=0$.

証明 一次変換 $t' = (t-a)/(b-a)$ により, 区間 $[a,b]$ を $[0,1]$ に写せて, 逆も一次変換 (多項式) なので, $[a,b]=[0,1]$ として示せば良い. まず $t \in [0,1]$ に対し,

$$\sum_{k=0}^{n}(k-nt)^2\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k} = nt(1-t) \le \frac{1}{4}n$$

が成り立つことに注意する. (不等式は $\sqrt{t(1-t)} \le (t+(1-t))/2 = 1/2$ による.) 実際, 二項定理より,

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} = (x+y)^n, \quad \text{特に} \quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k} = 1$$

で, x で微分し, x をかけ, さらに得られた式に同じ操作をすると

$$\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^k y^{n-k} = nx(x+y)^{n-1}, \quad \sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}x^k y^{n-k} = nx(nx+y)(x+y)^{n-2}$$

これらで $x=t$, $y=1-t$ として $(k-nt)^2 = k^2 - 2ntk + n^2t^2$ に用いれば良い. ここで次の多項式

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}$$

P_n が $[0,1]$ 上, 一様に f に近づくことを示す.

$$|f(t)-P_n(t)| \le \sum_{k=0}^{n}\left|f(t)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}$$

で, f は $[0,1]$ 上で一様連続でとなるから, $^\forall\varepsilon>0, ^\exists\delta>0; ^\forall t,t' \in [0,1]; |t-t'|<\delta, |f(t)-f(t')|<\varepsilon$. そこで t を固定して, 上の右辺の k の和を $|t-k/n|<\delta$ と $|t-k/n| \ge \delta$ で分けて, それぞれ S_1, S_2 とおけば,

$$|f(t)-P_n(t)| \le S_1+S_2, \quad \text{かつ}, \quad S_1 \le \varepsilon\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k} = \varepsilon.$$

さらに $M = \max_{t\in[0,1]}|f(t)|$ とおくと $|f(t)-f(k/n)| \le 2M$, また $|t-k/n| \ge \delta$ なら $1 \le |nt-k|/(n\delta)$ より,

$$S_2 \le 2M\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{|nt-k|}{n\delta}\right)^2\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k} \le \frac{M}{2n\delta^2}.$$

よって

$$|f(t)-P_n(t)| \le \varepsilon + \frac{M}{2n\delta^2}.$$

右辺は $t \in [0,1]$ に無関係なので, 左辺に $\sup_{t\in[0,1]}$ を施しても変わらず, さらに $n \to \infty$ とすれば

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in[0,1]}|f(t)-P_n(t)| \le \varepsilon$$

となり, $\varepsilon > 0$ の任意性から, (左辺)$=0$ を得る. ■

A.5 有限次元ノルム空間の任意のノルムの同値性の証明

問 3.5 の解

$\dim X = n$ として $\{x_1, \ldots, x_n\}$ basis とすると $^\forall x \in X, ^\exists(\alpha_1, \ldots, \alpha_n); x = \sum \alpha_i x_i$. そこで $\|x\|_\infty = \max|\alpha_i|$ とおくと 1 つの norm となる. $\|x\|$ を別の任意のノルムとする.

$$\|x\| \le \sum |\alpha_i|\|x_i\| \le \max|\alpha_i| \cdot \sum \|x_i\| = c_1\|x\|_\infty \quad (c_1 = \sum \|x_i\|).$$

逆について. 背理法で示す. もし $^\forall k \ge 1, ^\exists y_k; \|y_k\| > k\|y_k\|$ とすると, $\|(y_k/\|y_k\|_\infty)\| < 1/k \to 0$. 即ち, $z_k = y_k/\|y_k\|_\infty$ とおけば, $\|z_k\|_\infty = 1$ で, $\|z_k\| < 1/k \to 0$, i.e., $z_k \to 0$ under $\|\cdot\|$. 一方実際, $z_k = \sum_{i=1}^n \beta_i^{(k)} x_i$ と表せて, $1 = \|z_k\|_\infty = \max|\beta_i^{(k)}|$ より, $^\exists\beta_i^{(k_j)} \to {}^\exists\beta_i$ in K がいえて, これから $^\exists z_{k_j} \to {}^\exists z$ under $\|\cdot\|_\infty$, つまり under $\|\cdot\|$ by (前半). 極限の一意性から $z = 0$ となるが, $1 = \|z_{k_j}\| \to \|z\|$ に矛盾. 従って $^\exists c_0 > 0; \|x\| \ge c_0\|x\|_\infty$ $(x \in X)$. ■

後半の証明については色々なやり方がある.

[別解] $^\exists c_0 > 0; \|x\| \ge c_0\|x\|_\infty$ $(x \in X)$, i.e., $0 < c_0 \le \|x\|/\|x\|_\infty = \|(x/\|x\|_\infty)\|$ を言えば良い. ここで $y = x/\|x\|_\infty$ とおいて考えれば, $f(y) := \|y\|$ に対し, $^\exists \min_{y;\|y\|_\infty=1} f(y) > 0$ を示せば良いことになる. まず前半で示したことから $y_k \to y$ under $\|\cdot\|_\infty$ なら under $\|\cdot\|$ となり, これから $f(y)$ は conti. under $\|\cdot\|$. さらに $S := \{y; \|y\|_\infty = 1\}$ とおけば, compact なることが仮定から分かる. 実際, $y = \sum_{i=1}^n \beta_i x_i$ と表せて, $1 = \|y\|_\infty = \max|\beta_i|$ より, y と $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in K^n$ を同一視すれば, $S = \{(\beta_1, \ldots, \beta_n); \max|\beta_i| = 1\}$ は K^n における有界閉集合となる. 従って S は (点列) compact がいえる. 今, $^\forall y \in S, f(y) > 0$ で, 連続関数は compact set 上で最大・最小をもつので, $^\exists y_0 \in S; \min_S f = f(y_0) = \|y_0\| > 0$ となり, $c_0 = \|y_0\|$ ととれば良い. ■

A.6 中線定理

定理 付録 A.3 ノルム空間 X において, 中線定理 $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ がみたされるとき,

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right)$$

と定義すれば, これは内積となる.

証明 まず容易に分かることを挙げておく.

$$\langle x, x\rangle = \|x\|^2, \quad \langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}, \quad \langle ix, y\rangle = i\langle x, y\rangle, \quad \langle x, -y\rangle = -\langle x, y\rangle, \quad \langle x, 0\rangle = \langle 0, x\rangle = 0.$$

これらを用いて, 後は線形性を示せば良いが, 次の手順で示して行く.

(1) $\mathrm{Re}\langle x_1, y\rangle + \mathrm{Re}\langle x_2, y\rangle = \dfrac{1}{2}\mathrm{Re}\langle x_1 + x_2, 2y\rangle = \mathrm{Re}\langle x_1 + x_2, y\rangle$.

(2) 上式が Re なしで成り立つ.

(3) $\alpha \in \mathbf{R}$ なら $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$. さらに $\gamma \in \mathbf{C}$ に対し, $\langle \gamma x, y\rangle = \gamma\langle x, y\rangle$.

(1) 簡単のため実数値として考える, i.e., $\langle x,y\rangle=\mathrm{Re}\langle x,y\rangle$. 中線定理を用いて

$$\begin{aligned}\langle x_1,y\rangle+\langle x_2,y\rangle&=\frac{1}{4}\left\{(\|x_1+y\|^2+\|x_2+y\|^2)-(\|x_1-y\|^2+\|x_2-y\|^2)\right\}\\&=\frac{1}{8}\left\{(\|x_1+x_2+2y\|^2+\|x_1-x_2\|^2)-(\|x_1+x_2-2y\|^2+\|x_1-x_2\|^2)\right\}\\&=\frac{1}{8}(\|x_1+x_2+2y\|^2-\|x_1+x_2-2y\|^2)\\&=\frac{1}{2}\langle x_1+x_2,2y\rangle.\end{aligned}$$

よって $\langle x_1,y\rangle+\langle x_2,y\rangle=\langle x_1+x_2,2y\rangle/2$. ここで $x_2=0$ としてとれば, $\langle 0,y\rangle=0$ に注意して, $\langle x,y\rangle=\langle x,2y\rangle/2$. 上の式へ適応して, $\langle x_1,y\rangle+\langle x_2,y\rangle=\langle x_1+x_2,2y\rangle=\langle x_1+x_2,y\rangle/2$. よって複素数値のときも $\mathrm{Re}\langle x_1,y\rangle+\mathrm{Re}\langle x_2,y\rangle=\mathrm{Re}\langle x_1+x_2,y\rangle$.

(2) $\langle x_1+x_2,y\rangle+\langle y,x_1+x_2\rangle=(\langle x_1,y\rangle+\langle y,x_1\rangle)+(\langle x_2,y\rangle+\langle y,x_2\rangle)$ において y に iy を代入することにより, $\langle x_1+x_2,y\rangle-\langle y,x_1+x_2\rangle=(\langle x_1,y\rangle-\langle y,x_1\rangle)+(\langle x_2,y\rangle-\langle y,x_2\rangle)$ を得るので, 上と加えて $\langle x_1+x_2,y\rangle=\langle x_1,y\rangle+\langle x_2,y\rangle$.

(3) $y\in X$ を固定して $\alpha\in\mathbf{R}$ に対し, $f(\alpha):=\langle\alpha x,y\rangle$ とおく. 明らかに連続関数である. (2) で示したことより, $n\in\mathbf{N}$ に対し, $f(1)=f(n/n)=nf(1/n)$, i.e., $f(1/n)=(1/n)f(1)$. よって $f(m/n)=(m/n)f(1)$ $(m,n\in\mathbf{N})$. また $f(-\alpha)=-f(\alpha)$ なので, 結局, $^\forall r\in\mathbf{Q}$, $f(r)=rf(1)$. 連続性から, $^\forall\alpha\in\mathbf{R}$, $f(\alpha)=\alpha f(1)$, i.e., $\langle\alpha x,y\rangle=\alpha\langle x,y\rangle$. さらに $\beta\in\mathbf{R}$ に対し, $\langle i\beta x,y\rangle=i\langle\beta x,y\rangle=i\beta\langle x,y\rangle$. これらから $^\forall\gamma\in\mathbf{C}$, $\langle\gamma x,y\rangle=\gamma\langle x,y\rangle$ を得る. ■

A.7 ヒルベルト空間 $A^2(\Omega)$

$\Omega\subset\mathbf{C}$ open に対し,
$f\in A^2(\Omega)$ $\overset{\text{def}}{\iff}$ f 正則 on Ω, $\displaystyle\iint_\Omega|f(z)|^2dxdy<\infty$ $(z=x+iy)$.
$f,g\in A^2(\Omega)$ に対し, $(f,g)=\displaystyle\iint_\Omega f(z)\overline{g(z)}dxdy$ とおけば Hilbert.

証明 完備性を示せば良い. $\{f_n\}$ を $A^2(\Omega)$ での Cauchy 列とする. $z=x+iy\in\mathbf{C}$ と $(x,y)\in\mathbf{R}^2$ を同一視することにより, $f_n\in L^2(\Omega)$ での Cauchy 列とみなせるので $^\exists f\in L^2(\Omega)$; $\|f_n-f\|_{L^2}\to 0$. この f が正則であることを示せば良い. $z\in\Omega$ を固定して, Cauchy の積分公式より,

$$f_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z|=r}\frac{f_n(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\quad(0<r\le\varepsilon)$$

但し, $\varepsilon>0$ 十分小; $\{|\zeta-z|<\varepsilon\}\subset\Omega$. 両辺に r を掛けて, r について 0 から ε まで積分すると

$$\text{(付録 A.3)}\qquad \frac{1}{2}\varepsilon^2f_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^\varepsilon drr\int_{|\zeta-z|=r}\frac{f_n(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi}\iint_{|\zeta-z|\le\varepsilon}f_n(\zeta)d\xi d\eta\quad(\zeta=\xi+i\eta).$$

(最後の等式は $|\zeta-z|=r$ のもと $\zeta-z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ より, $d\zeta=r(-\sin\theta+i\cos\theta)d\theta=ir(\cos\theta+i\sin\theta)d\theta=i(\zeta-z)d\theta$ に注意して,

$$\int_0^\varepsilon drr\int_{|\zeta-z|=r}\frac{d\zeta}{\zeta-z}=\int_0^\varepsilon drr\int_0^{2\pi}id\theta=i\iint_{|\zeta-z|\le\varepsilon}d\xi d\eta.)$$

f_n が $L^2(\Omega)$ で収束するから (付録 A.3) の右辺は z について Ω 上で広義一様収束する. ($^\forall K \subset \Omega$ compact を 1 つとり, $\varepsilon > 0$ を $K_\varepsilon := \{\zeta; |\zeta - z| \le \varepsilon, z \in K\} \subset \Omega$ なるようにとれば良い.

$$\sup_{z\in K} \iint_{|\zeta - z|\le\varepsilon} |f_n(\zeta) - f(\zeta)| d\xi d\eta \le \iint_{K_\varepsilon} |f_n(\zeta) - f(\zeta)| d\xi d\eta \le \|f_n - f\|_{L^2} |K_\varepsilon|^{1/2} \to 0).$$

従って (付録 A.3) の左辺の $2/\varepsilon^2$ 倍は正則関数 f^* に広義一様収束する. $f_n \to f$ in $L^2(\Omega)$ より, $f = f^*$ a.e. よって $f \in A^2(\Omega)$. ■

付録 B　弱収束, 共役作用素

ノルム空間 X に対し, $X^{**} := (X^*)^*$ を X の**第 2 共役空間**という. このとき $X \subset X^{**}$ とみなせる. また $X^{**} = X$ をみたすとき X を**反射的 Banach sp.** という. $1 < p < \infty$ に対し, $L^P(\Omega)$ や l^p などは反射的 Banach sps である.

B.1　弱収束

X を normed ps. とする. 今までのノルムでの収束を強収束ともいうが, それより弱い収束概念を定義する.

・**強収束** $x_n \to x$ (strong) in $X \overset{\text{def}}{\iff} \|x_n - x\| \to 0$. このとき $\text{s-lim}_{n\to\infty} x_n = x$ などと表す.

・**弱収束** $x_n \to x$ (weak) in $X \overset{\text{def}}{\iff} {}^\forall f \in X^*, f(x_n) \to f(x)$. このとき $\text{w-lim}_{n\to\infty} x_n = x$ などと表す.

明らかに強収束なら弱収束である.

問 付録 B.1　$x_n \to x$ (weak) なら, その極限は一意的であることを示せ.

[解]　$x_n \to x'$ (weak) とする. もし $x \neq x'$ とすると拡張定理により, ${}^\exists f \in X^*; f(x - x') = \|x - x'\| \neq 0, \|f\| = 1$. よって $f(x - x') = f(x) - f(x') = \text{w-}\lim(f(x_n) - f(x_n)) = 0$ となり, 矛盾する. qed

例 付録 B.1　$X = l^2$ において $f \in l^2$ に対し, ${}^{\exists_1} y = (y_k) \in l^2; f(x) = \sum x_k y_k$ $(x = (x_k) \in l^2)$. $x^{(n)} = (x_k^{(n)} = \delta_{n,k}) \in l^2$ を考えると $f(x^{(n)}) = y_n \to 0$ より, $x^{(n)} \to 0$ (weak). しかし $\|x^{(n)} - x^{(m)}\|_{l^2} = \sqrt{2}$ $(m \neq n)$. よって $\{x^{(n)}\}$ は強収束はしない.

定理 付録 B.1　X をノルム空間, $x_n \to x$ (weak) in X とする. このとき $\{\|x_n\|\}$ は有界で $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$ が成り立つ.

証明　${}^\forall f \in X^*, T_n(f) := f(x_n)$ とおくと $T_n \in X^{**}$. 仮定より, $\{T_n(f)\}$ は収束列. X^* が Banach なので, 一様有界性原理より, $\sup \|T_n\| < \infty$. また $T(f) := f(x) = \lim f(x_n) = \lim T_n(f)$ とおくと $T \in X^{**}$ で, $\|T\| = \|x\|$. ここで $\|T_n\| = \|x_n\|$ に注意すれば, Banach-Steinhaus の定理より, $\|x\| = \|T\| \leq \liminf \|T_n\| = \liminf \|x_n\|$. ■

定理 付録 B.2　H を Hilbert sp. とする. $x_n \to x$ (weak) in H, かつ, $\|x_n\| \to \|x\|$ ならば $x_n \to x$ (strong) in H.

証明　まず $x_n \to x$ (weak) in H なら Riesz の表現定理より, ${}^\forall y \in H, \langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$ が成り立つことに注意する. 更にノルムが収束することから $\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 + \|x\|^2 - 2\Re\langle x_n, x\rangle \to \|x\|^2 + \|x\|^2 - 2\Re\langle x, x\rangle = 0$. ■

X をノルム空間とする.

・$f_n \to f$ (weak*) in X^*: **汎弱収束 (弱 * 収束)** $\overset{\text{def}}{\iff} {}^\forall x \in X, f_n(x) \to f(x)$.

定理 付録 B.3　X をノルム空間とし, $f_n \to f$ (weak*) in X^* とする. このとき $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$.

問 付録 B.2　上の定理を証明せよ.

B.2 共役作用素

定義 付録 B.1 X, Y をノルム空間とする. $T : D(T) \subset X \to Y$ 線形作用素に対し, $D(T)$ dense in X とする. このとき $g \in D(T^*) \subset Y^*$ を $^\exists f \in X^*; g \circ T = f$ on $D(T)$ として, $T^* : D(Y^*) \subset Y^* \to X^*$ を $T^*(g) = f$ と定義する. 即ち, $T^*(g) = g \circ T$. この線形作用素 T^* を T の**共役作用素 (adjoint op.)** という.

ここで上の $g \circ T = f$ なる f は g に対し, 一意的に定まることに注意する. 実際, もし $g \circ T = f'$ なら, $f = f'$ on $D(T)$ で, $D(T)$ が dense なので, f, f' の連続性から $f = f'$ on X となる.

特に T が有界作用素の場合, 連続でもあるから T を X 上に連続に拡張することが出来て, $D(T) = X$ とみなせる. このとき $^\forall g \in Y^*$ に対し, $f := g \circ T$ とおけば $f \in X^*$ となり, $D(T^*) = Y^*$ である.

もし $X = H$, $Y = H'$ が Hilbert なら $\langle x, T^*y \rangle = \langle Tx, y \rangle$ $(x \in D(T), y \in D(T^*))$ をみたす. 更に $D(T^*) = D(T)$ かつ $T = T^*$ on $D(T)$ をみたすとき T を**自己共役作用素 (self-adjoint op.)** という. また $D(T) \subset D(T^*)$ かつ $T = T^*$ on $D(T)$ をみたすとき, 即ち, $\langle x, Tx \rangle = \langle Tx, y \rangle$ $(x, y \in D(T))$ をみたすとき T を**対称作用素 (symmetric op.)** という.

例 付録 B.2 $X = Y = \mathbf{R}^n$ とし, T を $\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^n$ への有界作用素なら $t_{j,k} := \langle Te_j, e_k \rangle$ に対し, $T = (t_{j,k})$ と同一視できる. このとき $T^* = {}^tT$; T の転置となる. 更に $X = Y = \mathbf{C}^n$ なら $T^* = {}^t\overline{T}$; 共役転置となる.

例 付録 B.3 $H = L^2(0,1)$ とおく. $k(t,s)$ を $[0,1]^2$ 上の連続関数とし, $x \in H$ に対し, $Tx(t) = \displaystyle\int_{[0,1]} k(t,s)x(s)ds$ とおくと T は H の中への有界作用素で, $D(T) = D(T^*) = H$.
しかも $T^*y(t) = \displaystyle\int_{[0,1]} \overline{k(t,s)}y(s)ds$ となる.

付録 C レゾルベントとスペクトル

線形代数において T を n 次正方行列としたとき, $^\exists \lambda \in \mathbf{C}, {}^\exists x \in \mathbf{R}^n; x \neq 0, Tx = \lambda x$ なら λ を T の固有値, x を T の固有ベクトルといった. このとき λ が固有値 $\iff \det(\lambda I - T) = 0$.

もし λ が固有値でなければ, 即ち, $(\lambda I - T)x = 0$ なる x は 0 のみ ($\mathrm{Ker}(\lambda I - T) = \{0\}$, i.e., $\lambda I - T$ が 1 to 1) なら, $\det(\lambda I - T) \neq 0$ で, $^\exists(\lambda I - T)^{-1}$ となる.

これを踏まえて, T をノルム空間 X の中の稠密に定義された閉作用素のとき,

・$z \in \rho(T) \overset{\text{def}}{\iff} z \in \mathbf{C}$; $\mathrm{Ker}(zI - T) = \{0\}$ ($zI - T$ は 1 to 1) かつ $(zI - T)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.

とおき, $\rho(T)$ を T の**レゾルベント集合 (resolvent set)** という. また $R(z) := (zI - T)^{-1}$ を T の**レゾルベント**という. さらに $\sigma(T) := \mathbf{C} \setminus \rho(T)$ を T の**スペクトル (spectrum)** という.

$^\exists x \in D(T); x \neq 0, Tx = zx$, i.e., $(zI - T)x = 0$ のとき $z \in \mathbf{C}$ を T の固有値といい, その全体を $\sigma_p(T)$ と表し, **点スペクトル (point spectrum)** という. また $N(zI - T) := \mathrm{Ker}(zI - T)$ を固有値 z に対する**固有空間**といい, その次元を固有値 z の**多重度**という. 明らかに $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$.

・$z_1, z_2 \in \rho(T)$ なら $R(z_1) - R(z_2) = (z_1 - z_2)R(z_1)R(z_2)$ (**resolvent eqution**) が成り立つ.

・$\rho(T)$ は開集合. 従って $\sigma(T)$ は閉集合.

・$R(z)$: holmorphic on $\rho(T)$.

・$T \in \mathcal{L}(X)$ に対し, $r(T) := \limsup \sqrt[n]{\|T^n\|}$ を**スペクトル半径 (spectral radius)** という.

(i) $|z| > r(T) \Longrightarrow z \in \rho(T)$, $R(z) = \displaystyle\sum_{k \geq 0} \frac{1}{z^{k+1}} T^k = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} T + \frac{1}{z^3} T^2 + \cdots$.

(ii) ${}^\exists z \in \sigma(T); |z| = r(T)$.

付録 D　コンパクト作用素

X, Y を Banach sps とする.

線形作用素 $T : X \to Y$ が **compact** (or **完全連続**)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^\forall\{x_n\} \subset X$: bdd, ${}^\exists\{x_{n_k}\}; Tx_{n_k} \to {}^\exists y \in Y$.

明らかに compact op. は有界作用素である. (もし有界でなければ, ${}^\exists x_n \in X; \|x_n\| = 1, \|Tx_n\| \geq n \to \infty$ となり, compact 性に反する)

T: compact $\Longrightarrow$ $x_n \to x$ (weak) in X なら $Tx_n \to Tx$ (strong) in Y.

定理 付録 D.1 H: 無限次元可分 Hilbert, $T : H \to H$: compact self adj. op. に対し, 固有値 $\{\lambda_n\} \subset \mathbf{R}$ と対応する ONS $\{x_n\}$ が存在し,

$$^\forall x \in H, {}^\exists c_k \in K, {}^\exists x' \in H; Tx' = 0,\ x = \sum c_k x_k + x',\ Tx = \sum \lambda_k c_k x_k.$$

ここで $\lambda_n \to 0$ かつ $\dim N(\lambda_n I - T) < \infty$ (${}^\forall n$).