微分積分学 II (Differential & Integral Calculus II)

平場　誠示 (Seiji HIRABA)

2018 年 5 月 3 日

目 次

0 無限級数 (Infinite series)

本節の内容は, 微分積分学 I の最後と同じであるので, 良く理解している人はとばして貰いたいが, 非常に良く用いられる部分であり, 複素関数論においても基礎となる内容なので, 復習を兼ねて, 再度, 述べることとする. （数学は 2, 3 回, 勉強して, やっと理解できるという事の方が多いので.）

0.1 微分積分学 I 復習

[論理記号]

・「$^\forall$ 」任意の　・「$^\exists$ 」存在して

・「; (セミコロン) = s.t.= such that 」以下をみたすような

・「, (コンマ) 」 かつ, 但し $^\forall$ の後は「に対して」

例えば 「$^\forall x \in I; |x-a| < \delta,$ 」は「$|x-a| < \delta$ をみたすような任意の $x \in I$ に対して」を意味する.

他に慣習として

・ε は十分小さい正の数を表す (ことが多い. 以下同様).

・L, M などは十分大きい正の数を表す.

・δ はよく $^\forall\varepsilon > 0$ に応じて決まってくる (存在する) 正の数 (実数) を表す.

・N も ε に応じて決まってくる番号 (自然数) を表す.

・また ε_0 や N_0 などと書いたときはある特定の値を表す.

さて数列の収束の定義は次の通りであった.

「数列 $\{a_n\}$ が $\alpha \in \mathbf{R}$ に収束する」 記号では $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ or $a_n \to \alpha\ (n \to \infty)$

$$\overset{\text{def}}{\iff} \quad {}^\forall\varepsilon > 0, {}^\exists N \in \mathbf{N}; {}^\forall n \geq N, |a_n - \alpha| < \varepsilon.$$

「任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $N \in \mathbf{N}$ が存在し, 任意の番号 $n \geq N$ に対し, $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ をみたす. 」

あるいはもう少し柔かく,

「どんな小さい正の数 ε をとっても, ある番号 N が存在し, N 以上のどんな番号 n に対しても a_n と α の差の絶対値が ε で抑えられる. 」

[注意] ここで N は ε に応じて決まってくるので $N = N(\varepsilon)$ or $N = N_\varepsilon$ と表すこともある.

しかし番号 n を大きくすると a_n が α に近づくのだから, 定義の ε と N が逆のような気はしないだろうか？果たして上の定義は本当に正しいのだろうか？実はその感覚は間違いで, 逆に収束しないということを考えてみれば良い.

「どんなに番号 n を大きくしても a_n は α に近づかない」ということを考えてみよう. これは次のように定義するのが妥当だと思えるだろう.

「**数列 $\{a_n\}$ が $\alpha \in \mathbf{R}$ に収束しない**. 」 $\lim_{n\to\infty} a_n \neq \alpha$ or $a_n \not\to \alpha\ (n \to \infty)$

$$\begin{aligned}
&\iff \quad {}^\exists\varepsilon_0 > 0; {}^\forall N \in \mathbf{N}, {}^\exists n \geq N; |a_n - \alpha| \geq \varepsilon_0 \\
&\iff \quad {}^\exists\varepsilon_0 > 0; {}^\forall k \in \mathbf{N}, {}^\exists n \geq k; |a_n - \alpha| \geq \varepsilon_0 \\
&\iff \quad {}^\exists\varepsilon_0 > 0; {}^\exists\{n_k\}_{k\geq 1}; n_k \to \infty\ (k \to \infty), |a_{n_k} - \alpha| \geq \varepsilon_0.
\end{aligned}$$

これの否定が収束の定義となるのである.

ちなみに否定命題を作るときには**形式的には**

『「$\forall$ 」と「$\exists$ 」を入れ換え, セミコロンをコンマに変えて, $\exists$ の後にはセミコロンをつけて, 最後の式を否定すれば良い』 が, それにより依存関係が変わることに注意!!

さらに級数についての結果の証明で良く用いる定理についても復習しておく.

定理 上に有界な単調増加列は収束する, i.e., $\exists M>0; \forall n, a_n \le M$ かつ, $a_n \uparrow$ なら $\exists \alpha \in \mathbf{R}; a_n \uparrow \alpha\ (n \to \infty)$.

これの証明には, **上に有界な集合の上限の存在**という**実数の連続性**に関わる公理を用いる.

・集合 $S \subset \mathbf{R}$ の**上限 (supremum)** : $a = \sup S \overset{\text{def}}{\iff} S$ の最小上界:

$$a = \min\{c; c \text{ は } S \text{ の上界, i.e., } \forall x \in S, x \le c\}.$$

S のどんな元よりも大きいか, または等しい値のうちで最小のもの ($a \in S$ とは限らないことに注意).

$\iff$ (1) $\forall x \in S, x \le a$, (2) $\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 = x_0(\varepsilon); a - \varepsilon < x_0\ (\le a)$.

[(1) で上界の一つであることを表し, (2) で最小性を表している.]

例 区間 $[0,1], [0,1)$ の上限は共に 1 である.

(定理の証明) $\alpha = \sup\{a_n\}$ とおくと, 上への有界性からこれは有限値として存在する. しかも上限の性質と数列の単調性から, これが極限となることが分る. 実際, $\forall \varepsilon > 0, \exists N; \alpha - \varepsilon < a_N$ で, $\forall n \ge N, a_N \le a_n \le \alpha$ より, これは $a_n \uparrow \alpha$ を意味する. ■

集合 $S \subset \mathbf{R}$ の**下限 (infimum)** は, 最大下界, 即ち,

$$\beta = \inf S := \max\{b; \forall x \in S, b \le x\}$$

$\iff$ (1) $\forall x \in S, \beta \le x$, (2) $\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 = x_0(\varepsilon) \in S; (\beta \le)\ x_0 < \beta + \varepsilon$.

0.2 級数の収束 (convergence of series)

数列 $\{a_n\}$ の和

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots \qquad (\text{簡単に } \textstyle\sum a_n \text{ とも表す.})$$

を**無限級数 (infinite series)** or 単に**級数** という.

級数 $\sum a_n$ が**収束する (converge)** $\overset{\text{def}}{\iff}$ 部分和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ が収束 $\iff \exists S \in \mathbf{R}; S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \to S$.

このとき $\sum a_n = S$ と表し, この S を級数の**和 (sum)** という.

収束しないときは **発散する (diverge)** という. (振動する場合も含む.)

等比級数 (geometric series) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ は $|r| < 1$ のときだけ, 収束し, $\sum ar^{n-1} = a/(1-r)$.

定理 1 (1) $\sum a_n$ 収束なら有限個の項を加えても, 除いても収束.

(2) $\sum a_n$ 収束なら定数 λ に対し, 次も収束 $\sum \lambda a_n = \lambda \sum a_n$.

(3) $\sum a_n$ 収束なら $\lim a_n = 0$. 対偶を考えると, $\lim a_n \ne 0$ なら $\sum a_n$ は発散.

(4) $\sum a_n, \sum b_n$ 共に収束なら, 次も収束 $\sum(a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$.

証明は部分和を考えれば, 数列の収束の性質から明らか.

また各項が非負 $a_n \geq 0$ のとき, $\sum a_n$ を**正項級数 (positive series)** という.

・正項級数 $\sum a_n$ $(a_n \geq 0)$ の収束・発散の判定法

定理 2 (積分判定法) $f(x) > 0$ が連続, 単調減少 on $[1,\infty)$, $a_n = f(n)$ として

$$\sum a_n \quad \text{収束} \quad \iff \quad \int_1^\infty f(x)dx \quad \text{収束}.$$

(証明) $n \leq x \leq n+1$ なら $f(n) \geq f(x) \geq f(n+1)$ より, 次が成り立つことから明らか.

$$\int_1^\infty f(x)dx \leq \sum_{n\geq 1} f(n) \leq f(1) + \int_1^\infty f(x)dx.$$

■

問 0.1 定積分を用いて (1) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^p}$ (2) $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n(\log n)^p}$ は $p>1$ なら収束, $p \leq 1$ なら発散を示せ.

定理 3 **[比較]** $a_n \leq {}^\exists K b_n$ $({}^\forall n \gg 1)$ で $\sum b_n$ 収束 $\Rightarrow \sum a_n$ もそう.
(${}^\forall n \gg 1$ は「十分大きな任意の番号 n に対して」, i.e., ${}^\exists N; {}^\forall n \geq N$.)
[コーシー (Cauchy's test)] $\rho := {}^\exists \lim \sqrt[n]{a_n}; 0 \leq \rho < 1$ なら 収束, $1 < \rho \leq \infty$ なら発散.
[ダランベール (d'Alembert's test)] $\rho := {}^\exists \lim a_{n+1}/a_n$; コーシーと同じ.

(証明) 初めのは部分和を考えれば, 「上に有界な単調増加列は収束する」ことより, 明らか.
残りの 2 つは, ラフに言えば, 何れも公比 ρ の等比級数に**非常に近い**ので成り立つのだが, より厳密には以下のように証明する.

(Cauchy の判定法の証明) $0 \leq \rho < 1$ のとき, $\rho_0 := \rho + \varepsilon < 1$ なる $\varepsilon > 0$ をとる. この ε に対し, ${}^\exists N; {}^\forall n \geq N, 0 \leq \sqrt[n]{a_n} < \rho_0 < 1$, i.e., $0 \leq a_n < \rho_0^n$. 従って, $\sum_{n\geq N} a_n \leq \sum_{n \geq N}\rho_0^n < \infty$. よって, $0 \leq \sum a_n \leq \sum_{n=1}^{N-1} a_n + \sum_{n\geq N}\rho_0^n < \infty$.

$1 < \rho \leq \infty$ のとき, $\rho_1 := \rho - \varepsilon > 1$ なる $\varepsilon > 0$ を 1 つとり, $\rho_1 > 1$ を決める. 但し $\rho = \infty$ なら $\rho_1 = 2$ とする. この $\rho_1 > 1$ に対し, ${}^\exists N; {}^\forall n \geq N$, $\sqrt[n]{a_n} > \rho_1 > 1$, i.e., $a_n > \rho_1^n$ が成り立つ. 従って, $\sum_{n\geq N} a_n \geq \sum_{n\geq N}\rho_1^n = \infty$. よって, $\sum a_n \geq \sum_{n\geq N}\rho_1^n = \infty$. ■

(d'Alembert の判定法の証明) これも上と同様だが, $0 \leq \rho < 1$ のとき, 同じ $\rho_0 < 1, \varepsilon > 0$ に対し, ${}^\exists N; {}^\forall n \geq N, 0 \leq a_{n+1}/a_n < \rho_0 < 1$, i.e., $a_{n+1} < a_n\rho_0 < a_N\rho_0^{n-N}$ より明らか.

$1 < \rho \leq \infty$ のときも, 同じ $\rho_1 > 1$ に対し, ${}^\exists N; {}^\forall n \geq N, 0 \leq a_{n+1}/a_n > \rho_1 > 1$, i.e., $a_{n+1} > a_n\rho_1 > a_N\rho_1^{n-N}$ より明らか. ■

問 0.2 正項級数についての判定法を駆使して収束・発散を調べよ (ただし, $0 \leq a < 1$, b, p は定数).

$$(1) \sum \frac{\log n}{n^2} \quad (2) \sum \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} \quad (3) \sum n^p a^n \quad (4) \sum \left(1 - \cos\frac{b}{n}\right) \quad (5) \sum \frac{b^n}{n!}\ (b > 0)$$

[$\log n \leq 2\sqrt{n}$, Cauchy, d'Alembert (Cauchy も可だが), $1 - \cos x \leq x^2/2$, Cauchy]

$a_n \geq 0$ のとき, $\sum(-1)^{n-1}a_n$ を**交代級数**という.

定理 4 (ライプニッツ (Leibniz) の定理) $[a_n \downarrow 0$ なら交代級数 $\sum(-1)^{n-1}a_n$ 収束$]$

(証明) 部分和 $S_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k$ に対し, $0 \leq S_{2n} \leq S_{2n+1} \leq a_1$, $S_{2n}\uparrow$, $S_{2n+1}\downarrow$ より, 有界な単調列は収束するから, $S_{2n}\uparrow {}^{\exists}\alpha$, $S_{2n+1}\downarrow {}^{\exists}\beta$ で, $0 \leq \beta-\alpha = \lim(S_{2n-1}-S_{2n}) = \lim a_{2n+1} = 0$. よって S_n は収束. ■

例 1 一般に交代級数の収束は分ってもその和が次のように, 求まるものは少ない.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots = \log 2$$

なぜなら $2n$ までの部分和を考えると

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-2\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2j} = \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+k/n} \\ &\to \int_0^1\frac{dx}{1+x} = \log 2 \quad (n\to\infty) \end{aligned}$$

d'Alembert の判定法において, $a_{n+1}/a_n \to 1$ ときは, 一般には分からないが, 次が知られている:

・ガウス (Gauss) の判定法 $a_n/a_{n+1} = 1+p/n+c_n/(n\log n); c_n \to 0$ と表されるとき, $\sum a_n$ は $p>1$ なら収束, $p\leq 1$ なら発散.
(証明) $p>1$ のとき $1<q<p$ を一つとる. $b_n = 1/n^q$ とおくと $\sum b_n < \infty$.

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{(n+1)^q}{n^q} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^q =: 1+\frac{q_n}{n}$$

とおくと $q_n = n[(1+1/n)^q-1] \to q\ (<p)$ [微分！]. よって

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}-\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{1}{n}\left(p-q_n+\frac{c_n}{\log n}\right)$$

はある番号から先のすべての n に対して正となる. よって $a_{n+1}/b_{n+1} \leq a_n/b_n$, i.e., a_n/b_n 減少列で有界. ${}^{\exists}K>0; a_n \leq Kb_n$. 故に $\sum a_n < \infty$.

$p\leq 1$ のとき, $b_n = 1/(n\log n)$ と比較する. $\sum b_n = \infty$. $x\log x$ on $[n,n+1]$ に平均値の定理より,

$$n < {}^{\exists}d_n < n+1; \quad (n+1)\log(n+1)-n\log n = \log d_n + 1.$$

よって

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{(n+1)\log(n+1)}{n\log n} = 1+\frac{\log d_n}{n\log n}+\frac{1}{n\log n} > 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n\log n}.$$

従って,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}-\frac{b_n}{b_{n+1}} < \frac{p-1}{n}+\frac{c_n-1}{n\log n}.$$

故に, ある番号から先すべての n に対し, $a_n/a_{n+1}-b_n/b_{n+1} < 0$, i.e., $a_n/b_n \leq a_{n+1}/b_{n+1}$. a_n/b_n は下に有界で ${}^{\exists}K>0; a_n \geq Kb_n$. 故に $\sum a_n = \infty$. ■

以下, 一般の無限級数 $\sum a_n$ について議論する.

定理 5 (Cauchy の判定条件) $\sum a_n$ 収束 $\iff a_{m+1}+\cdots+a_n \to 0\ (n>m\to\infty)$, i.e., ${}^{\forall}\varepsilon>0, {}^{\exists}N; {}^{\forall}n>m\geq N, |a_{m+1}+\cdots+a_n| < \varepsilon$.

証明は部分和 $S_n=\sum_{k\le n}a_k$ に対する Cauchy の判定条件より明らか.
(Cauchy 列 $|S_n-S_m|\to 0$ $(m,n\to\infty)$ $\iff$ 収束列 $S_n\to{}^\exists S$ $(n\to\infty)$.)

系 1 $\sum|a_n|$ 収束なら $\sum a_n$ もそう.

$|a_{m+1}+\cdots+a_n|\le|a_{m+1}|+\cdots+|a_n|$ とコーシーの判定条件より明らか.

$\sum a_n$ が**絶対収束 (absolute convergence)** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\sum|a_n|$ が収束.
ちなみに絶対収束しないが収束するときは**条件収束**するという.

定理 6 正項級数はその和の順番を入れ替えても, 収束・発散は変わらず, 収束する場合は同じ値になる. また絶対収束する級数は項の順番を入れ替えても絶対収束し, 和は変わらない.

(証明) まず正項級数について示す. $\sum a_n$ を正項級数とし, $\sum b_n$ をその順序を入れ換えた正項級数とする. またそれぞれの部分和を A_n, B_n として極限を A,B $(\le\infty)$ とする. $n\ge 1$ に対し, B_n の中に含まれる元の $\{a_k\}$ の最大番号を m とすると $n\le m$ で $B_n\le A_m\uparrow A$. よって $B\le A$. 逆に考えて $A\le B$ で $A=B$. (正確には $A<\infty$ なら, 有界な単調列が収束することから $B\le A$. 逆に考えて $A\le B$. $A=\infty$ のときは, もし $B<\infty$ とすると 上の議論の逆より, $A\le B<\infty$ となり矛盾する. ゆえに $A=B=\infty$.)

一般の $\sum a_n$ で $\sum|a_n|$ が収束するとする. $a\vee b=\max\{a,b\}$ を用いて

$$a_n^+=a_n\vee 0=\frac{1}{2}(|a_n|+a_n),\quad a_n^-=(-a_n)\vee 0=\frac{1}{2}(|a_n|-a_n)$$

とおくと, $0\le a_n^\pm\le|a_n|, a_n^++a_n^-=|a_n|, a_n^+-a_n^-=a_n$, 比較判定法より, $\sum a_n^\pm$ は収束し, $\sum a_n^++\sum a_n^-=\sum|a_n|, \sum a_n^+-\sum a_n^-=\sum a_n$. $\sum a_n$ の順番を変えた級数を $\sum b_n$ とすると, 前半のことより, $\sum|b_n|$ は収束し, $\sum|b_n|=\sum|a_n|$. $b_n^\pm$ を考えれば, 前半より, $\sum b_n^\pm=\sum a_n^\pm$. よって $\sum b_n=\sum b_n^+-\sum b_n^-=\sum a_n^+-\sum a_n^-=\sum a_n$. ■

定理 7 絶対収束する級数 $\sum a_n=A$ と $\sum b_n=B$ の各項 a_m,b_n をもれなく, 重複無く取り出し, その積 a_mb_n を任意の順序に並べて得られる級数 $\sum c_n$ も絶対収束し, $\sum c_n=AB$ となる. 特に

$$d_n=a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1=\sum_{j+k=n+1}a_jb_k\quad(\text{積級数という})$$

に対し, $\sum d_n=AB$ 絶対収束となる.

(証明) $\sum d_n=AB$ 絶対収束を示せば, 前の定理から前半も成り立つことが分る.
$\sum a_n, \sum b_n, \sum d_n$ の部分和をそれぞれ A_n,B_n,D_n とする.
(1) $\sum a_n, \sum b_n$ 共に正項級数のとき. $D_n\le A_nB_n\le D_{2n}$ が成り立つことに注意すれば, 容易に分かる.
(2) 一般のとき. $a_n'=|a_n|, b_n'=|b_n|, d_n'=\sum_{j+k=n+1}|a_jb_k|$ とし, 部分和をそれぞれ A_n',B_n',D_n' とおくと, $D_n'\le A_n'B_n'\le D_{2n}'$, 上のことから, $\sum d_n'=\sum|a_n|\sum|b_n|$ で, $|d_n|\le d_n'$ より, $\sum|d_n|<\infty$. また $A_nB_n-D_n$ は a_jb_k の $j.k$ が $j,k\le n, j+k\ge n+2$ をみたすものの和なので, $A_n'B_n'-D_n'$ は $|a_jb_k|$ の同様な和なので, $|A_nB_n-D_n|\le A_n'B_n'-D_n'\to 0$ となり, $\sum d_n=\sum a_n\sum b_n$ も成り立つ. ■

例 2 $|x|<1$ のとき, $\sum x^{n-1}=1/(1-x)$ だが, これ同士の積級数は $1\cdot x^{n-1}+x\cdot x^{n-2}+\cdots+x^{n-1}\cdot 1=nx^{n-1}$ となり, $\sum nx^{n-1}=1/(1-x)^2$ をえる.

0.3 関数列と関数項級数 (sequence of functions and series of functions)

集合 $S \subset \mathbf{R}$ で定義された関数列 $f_n(x)$ と関数 $f(x)$ について

(1) $f_n \to f$ on S (or $f_n \to f$ p.w. on S): f_n が f に S で**各点収束** (**pointwise convergence**)
$\overset{\text{def}}{\iff} {}^\forall x \in S, f_n(x) \to f(x)\ (n \to \infty)$
$\iff {}^\forall x \in S, {}^\forall \varepsilon > 0, {}^\exists N \in \mathbf{N}; {}^\forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$

($N = N(x, \varepsilon) > 0$ は $x \in S$ と $\varepsilon > 0$ に依存して決まる.)

(2) $f_n \rightrightarrows f$ on S (or $f_n \to f$ unif. on S): f_n が f に S で**一様収束** (**uniform convergence**)
$\overset{\text{def}}{\iff} \sup_S |f_n - f| := \sup_{x \in S} |f_n(x) - f(x)| \to 0\ (n \to \infty)$
$\iff {}^\forall \varepsilon > 0, {}^\exists N \in \mathbf{N}; {}^\forall n \geq N, {}^\forall x \in S, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$

($N = N(\varepsilon) > 0$ は $\varepsilon > 0$ のみに依存して決まり, x には無関係であることに注意！)

以下, 特に断らない限り, 区間 I は開区間, 閉区間, 半開区間のいずれかを表すものとする.

例 3 $I = [0, 1]$ として $n \geq 1$ に対し, $y = f_n(x)$ を, xy 座標平面において 4 点 $(0, 0)$, $(1/(2n), 2n)$, $(1/n, 0)$, $(1, 0)$ を線分で結んだグラフをもつ関数とすると, $f_n \to 0$ だが $f_n \not\rightrightarrows 0$ となる.

問 0.3 f_n が f に I で一様収束しないという命題を述べ, 上の例が一様収束でないことを証明せよ.

$n = 1, 2, \ldots$ に対し, $f_n(x) = \dfrac{1 - x^n}{1 - x}$ on $(-1, 1)$ を考えると, $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \dfrac{1}{1 - x}$ (各点収束) で, $0 < {}^\forall a < 1$ に対し, $[-a, a]$ 上で一様収束だが, $(-1, 1)$ 上では一様収束はいえない. (このとき f_n は $(-1, 1)$ 上で**広義一様収束**しているという.)

問 0.4 上のことを確かめよ.

定理 8 連続関数列の一様収束極限は連続; [I で f_n: conti., かつ $f_n \rightrightarrows f$ ならば f: conti.]
(対偶をいえば, 連続関数列の極限関数が連続でなければ, その収束は一様収束ではない.
もちろん, 逆は一般に成り立たない. → 例 3.)

(証明) ${}^\forall x_0 \in I, {}^\forall \varepsilon > 0$ をとる. $f_n \rightrightarrows f$ on I より, ${}^\exists n_0; |f_{n_0}(x) - f(x)| < \varepsilon/3\ ({}^\forall x \in I)$. 更に f_{n_0} 連続より, ${}^\exists \delta > 0; {}^\forall x \in I; |x - x_0| < \delta, |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \varepsilon/3$. よって $|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$. ■

区間 I 上の関数列 $\{f_n(x)\}$ に対し,

$$\sum_n f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots$$

を**関数項級数 (series of functions)** という. 簡単に $\sum f_n$ と表すこともある.

関数列のときと同様に部分和 $F_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ が, I 上, 各点収束 (or 一様収束) するとき, $\sum_n f_n(x)$ が I 上, **各点収束** (or **一様収束**) するという.
区間 I 上の関数列 $\{f_n(x)\}$ に対し,

定理 9 $I=[a,b]$ 有界閉区間で f_n 連続とする.
(1) **[極限と積分の交換可能定理]** $f_n \rightrightarrows f$ なら $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n dx = \int_a^b f dx$.
(2) **[項別積分可能定理]** $\sum f_n$ 一様収束なら $\displaystyle\int_a^b \sum f_n dx = \sum \int_a^b f_n dx$.

(証明) (1) $\displaystyle\left|\int_a^b f_n dx - \int_a^b f dx\right| \le \int_a^b |f_n - f| dx \le (b-a)\cdot \sup_I |f_n - f| \to 0.$
(2) 部分和 $F_n = \sum_{k\le n} f_k$ に対し, (1) を適用すれば良い. ■

前の例 3 は各点収束だけでは積分が収束することは保証できないことも表している.

定理 10 区間 $I=[a,b]$ で $f_n \in C^1$.
(1) **[極限と微分の交換可能定理]** $f_n \to f$ かつ $\{f_n'\}$ 一様収束ならば $f\in C^1$, $f_n' \rightrightarrows f'$. 少し変えて
$^\exists x_0 \in I; f_n(x_0)$ 収束, かつ $\{f_n'\}$ 一様収束ならば $^\exists f\in C^1$, $f_n \to f$, $f_n' \rightrightarrows f'$.
(2) **[項別微分可能定理]** $\sum f_n$ が各点収束し ($^\exists x_0\in I; \sum f_n(x_0)$ 収束で十分), $\sum f_n'$ が一様収束するなら $\sum f_n$ も C^1 級で, $(\sum_n f_n(x))' = \sum_n f_n'(x)$.

(証明) (1) $\displaystyle f(x) = \lim f_n(x) = \lim\left(f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f_n'(t)dt\right) = f(x_0) + \int_{x_0}^x \lim f_n'(t)dt$. これから $f\in C^1$ は明らかで, 両辺を微分して $f'(x) = \lim f_n'(x)$, i.e., $f_n' \rightrightarrows f'$.
後半は $f_n(x_0)\to\alpha$ として, $\displaystyle f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f_n'(t)dt \to \alpha + \int_{x_0}^x \lim f_n'(t)dt$ より, 右辺を $f(x)$ とおけば $f(x_0)=\alpha$, $f'(x)=\lim f_n'(x)$ より OK.
(2) 部分和を考えれば良い. ■

定理 11 (Cauchy の収束条件)
(1) f_n: 一様収束 $\iff \sup_{x\in I}|f_n(x)-f_m(x)| \to 0$ $(m,n\to\infty)$.
$\iff {}^\forall\varepsilon>0, {}^\exists N; {}^\forall m,n\ge N, {}^\forall x\in I, |f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$.
(2) $\sum f_n$: 一様収束 $\iff \sup_{x\in I}|f_{m+1}(x)+\cdots+f_n(x)| \to 0$ $(n>m\to\infty)$.
$\iff {}^\forall\varepsilon>0, {}^\exists N; {}^\forall m,n\ge N, {}^\forall x\in I, |f_{m+1}(x)+\cdots+f_n(x)|<\varepsilon$.

(証明) (1) のみ示せば十分で, $\Rightarrow$ は明らか. 逆は 条件より, 各 $x\in I$ を固定する毎には $\{f_n(x)\}$ は Cauchy 列となるので, 極限が存在する; $f(x) := {}^\exists \lim f_n(x)$. $|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$ で $m\to\infty$ とすれば, $|f_n(x)-f(x)|\le\varepsilon$. これが ${}^\forall n\ge N, {}^\forall x\in I$ で成り立つので, 一様収束となる. ■

定理 12 (ワイエルストラス (Weierstrass) の優級数判定法)
区間 I での関数列 $\{f_n\}$ に対して, ${}^\exists\{M_n\}$: 数列; $|f_n(x)|\le M_n, \sum M_n<\infty$ なら $\sum f_n$ は一様収束.

(証明) まず ${}^\forall x\in I$ に対し, $\displaystyle\sum_n |f_n(x)| \le \sum M_n < \infty$ より, $\sum_n f_n(x)$ は絶対収束するので, 収束する. ${}^\exists \sum_n f_n(x)$ (=: $F(x)$ とおく). 部分和 $\displaystyle F_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ を考えると,

$$|F(x)-F_n(x)| \le \sum_{k\ge n+1}|f_k(x)| \le \sum_{k\ge n+1} M_n, \text{ i.e., } \sup_I |F-F_n| \le \sum_{k\ge n+1} M_n \to 0.$$ ■

これは Cauchy の収束条件を用いても証明できる.

(別証) $^\forall x \in I$ に対し, $|f_{m+1}(x)+\cdots+f_n(x)| \le |f_{m+1}(x)|+\cdots+|f_n(x)| \le M_{m+1}+\cdots+M_n \to 0$ $(n > m \to \infty)$ より, 明らか. ■

開区間 (a,b) 上の関数列 $\{f_n\}$ が, f_n が f に (a,b) で**広義一様収束**, i.e., $f_n \rightrightarrows f$ 広義 on (a,b) $\overset{\text{def}}{\iff}$ $f_n \rightrightarrows f$ on $^\forall[p,q] \subset (a,b)$.

同様に関数項級数 $\sum f_n$ が**広義一様収束** on (a,b) $\overset{\text{def}}{\iff}$ 部分和 $S_n = \sum_{k\le n} f_k$ が広義一様収束 on (a,b) と定義する.

上の結果の中で, 条件「**区間** $I=[a,b]$ **で一様収束**」を「$I=(a,b)$ **上の広義一様収束**」に変えても同じ結果が成り立つ.

例 4 $\dfrac{1-x^n}{1-x}$ は開区間 $(-1,1)$ で $\dfrac{1}{1-x}$ に広義一様収束する. また関数項級数 $\sum x^{n-1}$ は部分和が初めの式と同じなので, 同様である. さらにこれを項別積分すると

$$x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{1}{n}x^n + \cdots = -\log(1-x).$$

$|x|<1$ で広義一様収束. x を $-x$ に代えて,

$$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + \cdots = \log(1+x).$$

これは実は前の例から $x=1$ でも収束し, 次に述べるアーベルの第 2 定理から, $(-1,1]$ で連続である.

0.4 巾 (べき) 級数, 整級数 (power series)

a_n, b $(n \ge 0)$ を定数として,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-b)^n = a_0 + a_1(x-b) + a_2(x-b)^2 + \cdots$$

を b を中心とする**巾級数 (power series)** or **整級数** という. 以下では $b=0$ として考える.

定理 13 整級数 $\sum_n a_n x^n$ がある $x=t\ne 0$ で収束していれば, $|x|<|t|$ で広義絶対一様収束, i.e., $^\forall x; |x|<|t|$ に対し, $\sum_n a_n x^n$ 絶対収束. (ある $x=s$ で発散していれば, $^\forall x; |x|>|s|$ に対し, $\sum_n a_n x^n$ は発散もいえる.)

これをアーベル (Abel) の (第 1) 定理という教科書もある.

(証明) $a_n x^n = a_n t^n \cdot (x/t)^n$ より $r=|x/t|<1$ とおけば, $|a_n x^n| \le |a_n t^n| \cdot r^n$ で, 今, $\sum_n a_n t^n$ 収束より, $a_n t^n \to 0$ で $\{a_n t^n\}$ は有界, i.e., $^\exists M; |a_n t^n| \le M$. よって $\sum_n |a_n x^n| \le M \sum_n r^n < \infty$. この証明から分かるように $0<\rho_0<|t|$ を任意に固定し, $r_0 = \rho_0/|t| < 1$ とおけば, $|^\forall x| \le \rho_0$ に対し, $|a_n x^n| \le M r_0^n$ より, そこで一様収束する.

括弧内の主張は, もしある $x_0; |x_0|>|s|$ で $\sum_n a_n x_0^n$ が収束しているとすると, 上のことから, $\sum_n a_n s^n$ は絶対収束してしまい仮定に反する. ■

上の定理の $|t|$ の上限を R と表し, **収束半径 (radius of convergence)** という. 但し, そのような $t \ne 0$ が無いときは $R=0$ とし, $^\forall t$ で収束するなら $R=\infty$ とする.

定理 14 巾級数 $\sum_n a_n x^n$ の収束半径は $R = 1/\rho$ で与えられる; 但し, $\rho = \lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n|$ or $= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ if exists, ($0 \le \rho \le \infty$ で, $1/0 = \infty$, $1/\infty = 0$ と定義する.)

(証明) $\rho = \lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n|$ とする.
$|a_{n+1}x^{n+1}|/|a_n x^n| \to \rho|x|$ より, 正項級数の判定法を用いると,
(a) $0 < \rho < \infty$ のとき. $|x| < r = 1/\rho$ なら, $\rho|x| < 1$ で, 収束し, $|x| > r = 1/\rho$ なら, $\rho|x| > 1$ で, 発散する.
(b) $\rho = 0$ なら ${}^\forall x$ に対し, $|a_{n+1}x^{n+1}|/|a_n x^n| \to 0 < 1$ で, 収束.
(c) $\rho = \infty$ なら ${}^\forall x$ に対し, $|a_{n+1}x^{n+1}|/|a_n x^n| \to \infty > 1$ で, 発散.
$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ のときも同様 ($\sqrt[n]{|a_n x^n|} \to \rho|x|$ だから). ■

前節の定理により, 巾級数は, 収束半径内 ($|x| < R$) では, (広義一様収束, 即ち, $0 < {}^\forall r < R$ に対し, $|x| \le r$ で一様収束だから) 項別微分も項別積分も可能で, 実際, 次の結果が成り立つ.

定理 15 (巾級数の項別微分定理) 巾級数 $f(x) = \sum_n a_n x^n$ の収束半径を $R > 0$ とする.
(1) 項別微分した巾級数 $\sum_{n\ge1} n a_n x^{n-1}$ の収束半径も R で, $|{}^\forall x| < R$ に対し, $f'(x) = \sum_{n\ge1} n a_n x^{n-1}$.
(2) $f(x)$ は $(-R, R)$ で何回でも微分可能で, ${}^\forall k \ge 1$ に対し, $f^{(k)}(x) = \sum_{n\ge k} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k}$. 特に $a_n = f^{(n)}(0)/n!$.

(証明) (1) の収束半径が一致することさえ示せば十分. $\sum_{n\ge1} n a_n x^{n-1}$ の収束半径を R' とする. まず $R \le R'$ を示すには $|{}^\forall x| < R$ に対し, $\sum_{n\ge1} n a_n x^{n-1}$ が収束することをいえば良い. $|x| < r < R$ をとると $\sum_n a_n r^n$ は収束, よって ${}^\exists M; |a_n r^n| \le M$ で, $|a_n x^n| = |a_n r^n||x/r|^n \le M|x/r|^n$. これから $\sum_{n\ge1} |n a_n x^n| \le M \sum_{n\ge1} n|x/r|^n < \infty$. 従って, $\sum_{n\ge1} n a_n x^{n-1} = x^{-1}\sum_{n\ge1} n a_n x^{n-1}$ も収束. ゆえに $R \le R'$. 逆は $|x||a_n x^{n-1}| = |a_n x^n| \le |n a_n x^n|$ から明らか. ■

定理 16 (巾級数の項別積分定理) 巾級数 $f(x) = \sum_n a_n x^n$ の収束半径を $R > 0$ とすると,

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n\ge0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \quad (\text{広義一様 on } |x| < R).$$

(証明) 項別積分可能なことは明らかで, 右辺の収束半径は微分しても変わらないことから R と一致して, $|x| < R$ で広義一様収束する. ■

定理 17 (アーベル (Abel) の (第 2) 定理) 収束半径 R ($\ne 0, \infty$) の巾級数 $\sum a_n x^n$ において, $x = R$ でも収束なら収束は $[0, R]$ でも一様で, $f(x) = \sum a_n x^n$ は $(-R, R]$ で連続. ($x = -R$ で収束しているときも同様.)

(証明) $g(x) = f(Rx) = \sum a_n R^n x^n$, $b_n = a_n R^n$ として, $\sum b_n x^n$ に対し, 収束半径 1 で, $x = 1$ で収束するとして示せばよい. $\sum b_n = g(1)$ 収束より, ${}^\forall\varepsilon > 0, {}^\exists N; {}^\forall m \ge {}^\forall n \ge N$, $|b_n + b_{n+1} + \cdots + b_m| < \varepsilon$. ${}^\forall n \ge N$ を一つ固定し, $k \ge n$ に対し, $c_k = b_n + b_{n+1} + \cdots + b_k$ とおき, $b_n = c_n, b_{k+1} = c_{k+1} - c_k$ ($k \ge n$) と $|c_k| < \varepsilon$ に注意すると, ${}^\forall m > n$, $0 \le {}^\forall x \le 1$,

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=n}^m b_k x^k\right| &= |c_n x^n + (c_{n+1} - c_n)x^{n+1} + (c_{n+2} - c_{n+1})x^{n+2} + \cdots + (c_m - c_{m-1})x^m| \\
&= |c_n(x^n - x^{n+1}) + c_{n+1}(x^{n+1} - x^{n+2}) + \cdots + c_{m-1}(x^{m-1} - c^m) + c_m x^m| \\
&\le \varepsilon\left(\sum_{k=n}^{m-1}(x^k - x^{k+1}) + x^m\right) = \varepsilon x^n \le \varepsilon.
\end{aligned}$$

つまり $^\forall m \geq {}^\forall n \geq N$, $0 \leq {}^\forall x \leq 1$, $\left|\sum_{k=n}^{m} b_k x^k\right| \leq \varepsilon$. 従って, $\sum b_n x^n$ は $[0,1]$ で一様収束し, 和 $g(x) = \sum b_n x^n$ は $(-1,1]$ で連続. ■

定理 18 (テイラーの定理 (復習))
$f(x)$ は $[a,b]$ で C^{n-1} 級で, (a,b) で n 回微分可能とする. $^\exists\theta = \theta(a,b,n) \in (0,1)$;

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + R_n(x); \quad R_n(x) := \frac{f^{(n)}(a+\theta(b-a))}{n!}(b-a)^n.$$

但し, 端点での可微分性は区間内での微分, つまり $x=a$ では上からの $x=b$ では下からの微分として考える.

[テイラー展開] 上の定理において $f(x)$ が $[a,b]$ で C^∞ で, **剰余項** $R_n(x)$ が, $R_n(x) \to 0$ $(n \to \infty)$ をみたすとき

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

を**テイラー展開 (Taylor series expansion)** といい, 特に $a=0$ のとき**マクローリン (Maculaurin) 展開**ともいう

定理 19 $f(x)$: C^∞ 級 on $[-r,r]$ に対し, $^\exists N \geq 1$, $^\exists h(x) > 0$: 連続 on $[-r,r]$;

$$^\forall n \geq N, {}^\forall x \in [-r,r], |f^{(n)}(x)| \leq h(x)$$

なら $f(x)$ は $x=0$ でテイラー展開 (マクローリン展開) できる. ($h>0$ は定数で十分.)
もし区間 $[-r,r]$ を $[a-r,a+r]$ に代えられるなら, $x=a$ を中心とするテイラー展開ができる.

(証明) テイラーの定理より, $x \in [-r,r]$ に対し, $^\exists\theta = \theta(n,x,r)$;

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x)^k + R_n(x); \quad R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n.$$

$M = \max_{[-r,r]} h$ とおくと有限. 従って $n \geq N$ なら, $|f^{(n)}(x)| \leq h(x) \leq M$ on $[-r,r]$ より,

$$|R_n(x)| \leq \frac{|f^{(n)}(\theta x)|}{n!}|x|^n \leq \frac{M}{n!}|x|^n \to 0 \ (n \to \infty).$$

■

例 5

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots \quad \text{on } (-\infty,\infty) \\
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots \quad \text{on } (-\infty,\infty) \\
\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots \quad \text{on } (-\infty,\infty) \\
\log(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots \text{ on } (-1,1] \\
\tan^{-1} x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots \quad \text{on } [-1,1]
\end{aligned}$$

初めの 3 つは, $(e^x)^{(n)} = e^x$, $(\sin x)^{(n)} = \sin(x+n\pi/2)$, $(\cos x)^{(n)} = \cos(x+n\pi/2)$ と上の定理で, $r > 0$ は任意でとれるから. $\log(1+x)$ は $x > -1$ に対して $(\log(1+x))^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}$ だが, $1/(1-x) = \sum_{n\geq 0} x^n$ $(|x| < 1)$ において x を $-x$ として, 項別積分すれば良く, 最後のは x を $-x^2$ として, 項別積分すれば良い. いずれも $x = 1$ では単調減少列の交代級数なので収束し, Abel の定理から, それが $\log 2$, $\tan^{-1} 1 = \pi/4$ であることも分る.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots = \log 2, \quad 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

また, **ニュートンの二項定理 (Newton's binomial theorem)** $\alpha \in \mathbf{R}$ に対し $\displaystyle\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ として $((1+x)^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$ より

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots$$

実際, $a_n = \displaystyle\binom{\alpha}{n}$ とおくと $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\dfrac{\alpha-n}{n+1}\right| \to 1$ $(n \to \infty)$ より, 収束半径は 1. $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 0}\binom{\alpha}{n}x^n$ とおくと $|x| < 1$ の範囲で項別微分できて $f'(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 1} n\binom{\alpha}{n}x^{n-1}$. よって,

$$(1+x)f'(x) = \alpha + \sum_{n\geq 1}\left\{(n+1)\binom{\alpha}{n+1} + n\binom{\alpha}{n}\right\}x^n = \alpha f(x).$$

(ここで真ん中の式の $\{\}$ の中身は定義に戻して計算すれば, $\alpha\displaystyle\binom{\alpha}{n}$.) 従って,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\alpha}{1+x}$$

両辺を 0 から x $(|x| < 1)$ まで積分して,

$$\log|f(x)| = a\log(1+x), \quad \text{i.e.,} \quad f(x) = \pm(1+x)^\alpha$$

$f(0) = 1$ より, 結局, $f(x) = (1+x)^\alpha$.

1 多変数関数の微分 (Differentials of functions of several variables)

1.1 平面の点列の収束と集合 (convergences of sequences of points and sets)

平面上の 2 点 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2), \boldsymbol{y} = (y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2$ に対し, その距離 $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

とおく. このとき次の性質をみたす.

(1) **正値性** $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq 0$, 等号成立は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ のときに限る.

(2) **対称性** $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$.

(3) **三角不等式** $d(\boldsymbol{x}, \mathbf{z}) \leq d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d(\boldsymbol{y}, \mathbf{z})$.

この距離は大きさ $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ に対し, $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$ と定義するのと同じであるので, 今後, 簡単のためこちらを用いる.

一般にある集合 X に, 上の (1) ~ (3) をみたすような関数 $d : X \times X \to [0, \infty]$ が与えられたとき, (X, d) を**距離空間 (metric space)** という.
一般の次元では $n \in \mathbf{N}$ として $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n), \boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n$ に対し,

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_2, \ldots, x_n + y_n), \quad \lambda \boldsymbol{x} = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

大きさを $|\boldsymbol{x}| := \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)^{1/2}$ とし, 距離 (metric) を $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$, 即ち, $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \left(\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2\right)^{1/2}$ とおく. この $\mathbf{R}^n$ を n 次元ユークリッド空間という. 特に距離 $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ をユークリッドの距離ともいう.

[点列の収束]
平面上の点列 $\{\boldsymbol{x}_n = (x_{1,n}, x_{2,n})\}_{n \geq 1}$ がある点 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ に収束する;
$\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{a}$ $(n \to \infty)$ or $\lim_{n \to \infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{a} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \lim_{n \to \infty} |\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{a}| = 0$, i.e., ${}^\forall \varepsilon > 0, {}^\exists N; {}^\forall n \geq N, |\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{a}| < \varepsilon$
このとき $\boldsymbol{a}$ を点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ の**極限** or **極限点 (limit point)** という. これは明らかな不等式

$$(|x_1 - y_1| \vee |x_2 - y_2|) \leq |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| \leq |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

から各成分が収束すること ${}^\forall i = 1, 2, x_{i,n} \to a_i$ $(n \to \infty)$ と同値である.

[集積点, 内点, 外点, 境界点]
$\delta > 0$ と平面上の点 $\boldsymbol{a}$ に対して,

$$U_\delta(\boldsymbol{a}) = U(\boldsymbol{a}; \delta) := \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^2; |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| < \delta\}$$

を **$\boldsymbol{a}$ の δ-近傍 (neighborhood)** という. また δ を省略し, 単に, $U(\boldsymbol{a})$ と表し, $\boldsymbol{a}$ の近傍ということもある.
平面上の集合 S に対して, 点 $\boldsymbol{a}$ が

- S の**内点 (inner point)** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^\exists \delta > 0; U_\delta(\boldsymbol{a}) \subset S$,

- S の**外点 (outer point)** $\overset{\text{def}}{\iff}$ ${}^\exists\delta > 0; U_\delta(\boldsymbol{a}) \subset S^c$ ($U_\delta(\boldsymbol{a}) \cap S = \emptyset$ としても同じ),
- S の**境界点 (boundary point)** $\overset{\text{def}}{\iff}$ ${}^\forall\varepsilon > 0, U_\varepsilon(\boldsymbol{a}) \cap S \neq \emptyset, U_\varepsilon(\boldsymbol{a}) \cap S^c \neq \emptyset$.

境界点の全体を S の**境界 (boundary)** といい, ∂S で表す. 内点, 外点はそれぞれ S と S^c に含まれるが, 境界点はどちらに属するか, 一般には分からない. また 内点の全体を S° or $\mathbf{Int}\, S$ で表すことがある. さらに $\overline{S} := S \cup \partial S = S^\circ \cup \partial S$ と表し, S の**閉包 (closure)** という.

- 点 $\boldsymbol{a}$ が S の**集積点 (accumulated point)** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\boldsymbol{a}$ の任意の近傍が S の点を無限個含む $\iff$ $\boldsymbol{a}$ の任意の近傍が $\boldsymbol{a}$ 以外の S の点を少なくとも一つ含む.

問 1.1 a が S の集積点 $\iff$ ${}^\exists\{a_n\} \subset S; a_n \neq a, a_n \to a$ を示せ.

[解] a が S の集積点 $\iff$ ${}^\forall\varepsilon > 0, (U_\varepsilon(\boldsymbol{a}) \setminus \{\boldsymbol{a}\}) \cap S \neq \emptyset$
$\iff$ ${}^\forall\varepsilon > 0, {}^\exists\boldsymbol{x}_\varepsilon \neq \boldsymbol{a}; \boldsymbol{x}_\varepsilon \in U_\varepsilon(\boldsymbol{a}) \cap S$ [ここで $\varepsilon = 1/n$ として] $\iff$ ${}^\exists\{\boldsymbol{a}_n\} \subset S; \boldsymbol{a}_n \neq \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}_n \to \boldsymbol{a}$.

- 集積点でない S の点 (境界点) を**孤立点 (isolated point)** という.

  明らかに内点は集積点であるから, 孤立点はあったとしても境界にしかない.

- S が**有界 (bounded)** $\overset{\text{def}}{\iff}$ ${}^\exists L > 0; {}^\forall\boldsymbol{x} \in S, |\boldsymbol{x}| \leq L$ (十分大きな円 (球) に含まれる.)
- S が**開集合 (open set)** $\overset{\text{def}}{\iff}$ ${}^\forall\boldsymbol{a} \in S, {}^\exists\delta > 0; U_\delta(\boldsymbol{a}) \subset S$ (i.e., $S^\circ = S$, S が内点のみからなる.)
- S が**閉集合 (closed set)** $\overset{\text{def}}{\iff}$ S^c が開集合
  $\iff$ S の境界点がすべて S の点 ($\overline{S} \subset S$, i.e., $\overline{S} = S$)
  $\iff$ S の集積点がすべて S の点
  $\iff$ S の任意の収束する点列の極限が常に S の点.

問 1.2 初めの $\iff$ は $S^c = (S^c)^\circ = (\overline{S})^c$, i.e., $\partial S \subset S$ によるが, これを説明し, 同値関係を示せ.

- S の任意の 2 点が S 内の連続曲線で結ばれるとき, **弧状連結**であるという.
- D が**領域 (domain)** =弧状連結な開集合, また $\overline{D}$ を**閉領域**という.

  正確には**領域=連結な開集合**だが, 「$\mathbf{R}^n$ では開集合が連結であることと弧状連結であることは同値」となる. ちなみに**連結**とは, 空で無い 2 つの開集合に分解できないものをいう.

例 6 (1) 円環 $\{(x,y); r_1^2 < (x-a)^2 + (y-b)^2 < r_2^2\}$ $(0 < r_1 < r_2)$ は有界領域
(2) $\{(x,y); r_1^2 \leq (x-a)^2 + (y-b)^2 < r_2^2\}$ $(0 < r_1 < r_2)$ は有界だが開集合でも閉集合でもない.
(3) $\{(x,y); (x-a)^2 + (y-b)^2 > r^2\}$ は非有界領域

1 次元のときと同様に次が成り立つ:

定理 20 (Bolzano-Weierstrass) 有界な無限点列は必ず集積点をもつ. 即ち, 収束部分列をもつ.

[証明] $\{(x_n, y_n)\}$ を有界点列とすると, $\{x_n\}, \{y_n\}$ も $\mathbf{R}$ 上の有界点列となるので, 1 次元のときのことから, まず, $\{x_n\}$ が収束部分列 $\{x_{n_k}\}; x_{n_k} \to x_0$ をもつ. さらに, $\{y_{n_k}\}$ も有界であることから, 収束部分列 $\{y_{n_{k_j}}\}; y_{n_{k_j}} \to y_0$ をもつ. 従って, $(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}}) \to (x_0, y_0)$ が成り立ち, これが求める部分列となる. ■

定理 21 収束列であるための必要十分条件はコーシー列であることである.

定理 22 有界閉集合 K において, その中の任意の無限点列は K のある点に収束する部分列をもつ.

問 1.3 上の 2 つの定理の証明をそれぞれ与えよ.

問 1.4 平面上の集合 A, B が有界閉集合なら $A + B := \{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}; \boldsymbol{a} \in A, \boldsymbol{b} \in B\}$ もそうであることを示せ. また有界という条件を除いても成り立つか考えよ.

(**ヒント** ${}^\forall\{\boldsymbol{a}_n\} \subset A, {}^\forall\{\boldsymbol{b}_n\} \subset B; \boldsymbol{a}_n + \boldsymbol{b}_n \to \mathbf{c}$ をとり, $\mathbf{c} \in A + B$ を示せば良い.)

1.2 多変数関数 (functions of several variables)

集合 $S \subset \mathbf{R}^n$ の上で定義された関数 $f : S \to \mathbf{R}; \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ を n **変数関数**という. 特に $n = 2$ のとき, $(x, y) \in S$ に対し, $f = f(x, y)$, $n = 3$ のとき, $(x, y, z) \in S$ に対し, $f = f(x, y, z)$ などと表す. これらをまとめて **多変数関数**という.

1 変数のときのように, 多変数の極限を

$$ {}^\exists\alpha \in \mathbf{R}; \lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \alpha \overset{\text{def}}{\iff} {}^\forall\varepsilon > 0, {}^\exists\delta > 0; {}^\forall\boldsymbol{x} \in S; |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| < \delta, |f(\boldsymbol{x}) - \alpha| < \varepsilon $$

で定義する. これは $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{a}$ にどのように近づけても一定の値に収束するということを意味する. 1 変数のときのように, 極限操作が四則演算を保つことは明らかであろう.

例題 1 次の極限値を (もし存在すれば) 求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ (2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$

[解] いずれも極座標表示 [$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ を用いると $(x, y) \to (0, 0) \iff r \to 0$ で,

(1) $\displaystyle\frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2} = \frac{1}{2}\sin 2\theta$ このとき, θ の値によって値が異なるので, 極限値無し.

(2) $\displaystyle\left|\frac{x^2 y}{x^2 + y^2}\right| = r|\cos^2\theta\sin\theta| \le r \to 0$ で, 極限値は 0. ■

連続性も同様に定義され, 1 変数のときと同様な性質をもつ. 即ち, 集合 D で定義された関数 $f = f(\boldsymbol{x})$ について

(1) $f(\boldsymbol{x})$ が**点** $\boldsymbol{a} \in D$ **で連続** $\overset{\text{def}}{\iff} {}^\forall\varepsilon > 0, {}^\exists\delta > 0; {}^\forall\boldsymbol{x} \in D; |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| < \delta, |f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a})| < \varepsilon.$

(2) $f(\boldsymbol{x})$ が**集合** D **で連続** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $f(\boldsymbol{x})$ が ${}^\forall\boldsymbol{a} \in D$ で連続
$\iff {}^\forall\boldsymbol{a} \in D, {}^\forall\varepsilon > 0, {}^\exists\delta > 0; {}^\forall\boldsymbol{x} \in D; |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| < \delta, |f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a})| < \varepsilon.$

定理 23 $f(\boldsymbol{x}), g(\boldsymbol{x})$ が $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$ で連続とする. 次もそうなる. (c は定数で, $g(\boldsymbol{x}) \neq 0$ とする.)

$$cf(\boldsymbol{x}), \quad f(\boldsymbol{x})+g(\boldsymbol{x}), \quad f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x}) \quad f(\boldsymbol{x})/g(\boldsymbol{x}).$$

定理 24 集合 D 上の関数 $f(\boldsymbol{x})$ が $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$ で連続で, $f(\boldsymbol{a})>0$ なら $^{\exists}U(\boldsymbol{a})$; $\boldsymbol{a}$ の近傍, $^{\forall}\boldsymbol{x} \in D \cap U(\boldsymbol{a}), f(\boldsymbol{x})>0$.

[証明] $\varepsilon = f(\boldsymbol{a})/2$ として連続性の定義を考えればよい. ■

定理 25 有界閉集合上で連続な関数はそこで最大値・最小値をもつ.

[証明] K を有界閉集合として $f(\boldsymbol{x})$ をそこで連続とする. $M := \sup\{f(\boldsymbol{x}); \boldsymbol{x} \in K\}$ とおくとこれが最大値となり, しかも $^{\exists}\boldsymbol{b} \in K; f(\boldsymbol{b}) = M$ がいえる. 実際, 上限の性質より, $^{\exists}\{\boldsymbol{x}_n\} \subset K; f(\boldsymbol{x}_n) \to M$ で, 更に K が有界閉集合であることから, $^{\exists}\boldsymbol{b} \in K, ^{\exists}\{\boldsymbol{x}_{n_k} =: \boldsymbol{y}_k\} \subset \{\boldsymbol{x}_n\}; \boldsymbol{y}_k \to \boldsymbol{b}, f(\boldsymbol{y}_k) \to M$ となり, f の連続性から $M = f(\boldsymbol{b})$ をえる. 最小値についても同様である. ■

$f(x)$ が D で**一様連続** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $^{\forall}\varepsilon > 0, ^{\exists}\delta > 0; ^{\forall}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in D; |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| < \delta, |f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| < \varepsilon$.

定理 26 有界閉集合上で連続な関数はそこで一様連続.

[証明] K を有界閉集合として $f(\boldsymbol{x})$ をそこで連続とする. もしそこで一様連続で無いとすると

$$^{\exists}\varepsilon_0 > 0, ^{\exists}\{\boldsymbol{x}_n\}, \{\boldsymbol{y}_n\} \subset K; |\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{y}_n| < 1/n, |f(\boldsymbol{x}_n) - f(\boldsymbol{y}_n)| \geq \varepsilon_0.$$

今, K 有界閉集合であるから

$$^{\exists}\boldsymbol{x}_0 \in K, ^{\exists}\{\boldsymbol{x}_{n_k}\} \subset \{\boldsymbol{x}_n\}; \boldsymbol{x}_{n_k} \to \boldsymbol{x}_0 \quad (k \to \infty).$$

ここで $|\boldsymbol{x}_{n_k} - \boldsymbol{y}_{n_k}| < 1/n_k \to 0$ より, $\boldsymbol{y}_{n_k} \to \boldsymbol{x}_0$ も成り立つ. よって連続性から

$$0 = |f(\boldsymbol{x}_0) - f(\boldsymbol{x}_0)| = \lim_{k\to\infty} |f(\boldsymbol{x}_{n_k}) - f(\boldsymbol{y}_{n_k})| \geq \varepsilon_0$$

となり矛盾する. ■

定理 27 (中間値の定理) 弧状連結な集合 D 上で連続な関数 f と $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \in D$ に対し, $f(\boldsymbol{a}_1) \neq (\boldsymbol{a}_2)$ なら f は $f(\boldsymbol{a}_1)$ と $f(\boldsymbol{a}_2)$ の間の値を D の点でとる.

[証明] $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ を結ぶ曲線 C のパラメータ表示を $\boldsymbol{a}(t)$ とする, i.e., $\boldsymbol{a}(t) : [0, t_0] \to C$; conti., $\boldsymbol{a}(0) = \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}(t_0) = \boldsymbol{a}_2$. このとき $f(\boldsymbol{a}(t))$ conti. on $[0, t_0]$ となるから, 1 変数の中間値の定理を用いればよい. ■

例題 2 次の関数は原点 $(0,0)$ で連続かどうか答えよ. 但し, $f(0,0)=0$ とする.

(1) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ $((x,y) \neq (0,0))$. (2) $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ $((x,y) \neq (0,0))$.

[解] 前の例題で見たように, 極座標表示 $[x = r\cos\theta, y = r\sin\theta]$ を用いれば. (1) 連続でない, (2) 連続. ■

ちなみにこれらは原点以外では連続で, 原点を含まない有界閉集合上では, 一様連続である.

1.3 偏微分, 全微分 (partial differentials, total differentials)

平面 $\mathbf{R}^2$ 上の点 (a,b) の近傍で定義された関数 $f(x,y)$ に対し,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) := \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} \quad \text{if exists}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) := \lim_{k\to 0}\frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k} \quad \text{if exists}$$

と定義し, 関数 f の点 (a,b) での**偏微分係数**という. またこれが存在するとき, **偏微分可能**であるという. ここで $\partial f/\partial x$ を $\partial_x f$, f_x などと表すこともある. ($\partial f/\partial y$ も同様.)

さらにある領域 $D \subset \mathbf{R}^2$ で定義された $f(x,y)$ がその中の各点で偏微分可能のとき, その偏微分係数を関数とみて, **偏導関数**という. これらを求めることを**偏微分する**という.

同様にして, 2 階偏微分 $\partial^2 f/\partial x^2 = f_{xx} = f_{x^2}$, $\partial^2 f/\partial y^2 = f_{yy} = f_{y^2}$, $\partial^2 f/\partial x\partial y = f_{yx}$, $\partial^2 f/\partial y\partial x = f_{xy}$ や更に高階の偏微分, n 階偏微分が定義できる. また n 階偏微分可能で, n 次の偏導関数がすべて連続なら C^n 級であるという. これがすべての n についていえるときは C^∞ 級であるという. ここで

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad f_{yx} = (f_y)_x$$

という意味で, 同じものであることに注意.

一般に, 後の例 7 で挙げるように f_{xy}, f_{yx} などは偏微分の順序が違うと同じになるとは限らないが, 後で示すように C^1 級であれば, これらは一致する. 従って C^n 級であればその n 階偏導関数は $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^k\partial y^{n-k}}$, $\partial_x^k\partial_y^{n-k} f$, $f_{x^k y^{n-k}}$ などと表すことができる.

問 1.5 偏微分可能でも連続とは限らない. その例を挙げよ. (**ヒント** 原点で, 前の例題 (1).)

[全微分]

$f(x,y)$ は点 (a,b) の近傍で定義されているとする. もし $^\exists A, B$; $\varepsilon(a,b;h,k) := f(a+h,b+k) - f(a,b) - Ah - Bk$ が $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\varepsilon(a,b;h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$ をみたすとき f は (a,b) で**全微分可能**であるという. このとき $k=0$ とすると $A = f_x(a,b)$, $h=0$ とすると $B = f_y(a,b)$ をえるので, 全微分可能なら偏微分可能で

$$\varepsilon(a,b;h,k) = f(a+h,b+k) - f(a,b) - f_x(a,b)h - f_y(a,b)k$$

となる. 更にこれは h,k に比べ, 十分小さいので $f(a+h,b+k) - f(a,b) = \Delta f(a,b)$, $h = \Delta x, k = \Delta y$ とおけば $\Delta f(a,b) \approx f_x(a,b)\Delta x + f_y(a,b)\Delta y$ と思って良い. そこで形式的に これの極限として

$$df(a,b) := f_x(a,b)dx + f_y(a,b)dy$$

とおき, これを f の (a,b) での**全微分**と呼ぶ. 明らかに

問 1.6 全微分可能なら連続である. (示せ.)

今, $\theta_0 \in [0.2\pi)$ を固定して, $\boldsymbol{u}_0 = (\sigma_0, \eta_0) := (\cos\theta_0, \sin\theta_0)$ とおく. この単位ベクトル $\boldsymbol{u}_0$ 方向の微分 (係数), 即ち **$\boldsymbol{u}_0$-方向微分 (係数)** を次で定義する.

$$\lim_{r\downarrow 0}\frac{f(a+r\sigma_0, b+r\eta_0) - f(a,b)}{r} \quad \text{if exists.}$$

(教科書によっては, $r \to 0$, 即ち, 正負の両方からの極限で定義するものもある.)
　もし f が全微分可能なら, その定義で $(h,k) = r\boldsymbol{u}_0 = r(\sigma_0, \eta_0) = (r\cos\theta_0, r\sin\theta_0)$ としてやれば,

$$\lim_{r\downarrow 0} \frac{f(a + r\sigma_0, b + r\eta_0) - f(a,b)}{r} = f_x(a,b)\sigma_0 + f_y(a,b)\eta_0$$

をえる. 即ち $\boldsymbol{u}_0$-方向微分係数は f の**勾配 (gradient)** $\nabla f \equiv \mathrm{grad}\, f := (f_x, f_y)$ と内積を用いて, (∇: ナブラ)

$$\langle \nabla f(a,b), \boldsymbol{u}_0 \rangle = f_x(a,b)\sigma_0 + f_y(a,b)\eta_0$$

で与えられる.

定理 28　領域 D 上の関数 $f(x,y)$ が全微分可能なら, すべての方向について微分可能で. 任意の単位ベクトル $\boldsymbol{u}$ に対し, $\boldsymbol{u}$-方向微分は $\langle \nabla f, \boldsymbol{u} \rangle$ で与えられる.

次に全微分可能となるための十分条件を与える.

定理 29　領域 D 上の偏微分可能な関数 $f(x,y)$ は f_x または f_y のどちらかが連続な点で全微分可能. 特に C^1 級なら全微分可能で, もちろん連続である.

[証明]　f_x が (a,b) で連続とする.

$$\Delta f := f(a+h, b+k) - f(a,b) = \{f(a+h, b+k) - f(a, b+k)\} + \{f(a, b+k) - f(a,b)\}$$

とする. 第 1 項は平均値の定理より, $^\exists\theta \in (0,1)$;

$$f(a+h, b+k) - f(a, b+k) = hf_x(a+\theta h, b+k) =: h(f_x(a,b) + \varepsilon_1)$$

とおくと f_x の連続性から $\varepsilon_1 = f_x(a+\theta h, b+k) - f_x(a,b) \to 0$ ($\sqrt{h^2+k^2} \to 0$). 第 2 項は $f(a,y)$ の $y = b$ での微分可能性から,

$$f(a, b+k) - f(a,b) = kf_y(a,b) + k\varepsilon_2$$

とおくと $\varepsilon_2 \to 0$ ($k \to 0$). よって

$$\varepsilon(a,b;h,k) = f(a+h, b+k) - f(a,b) - f_x(a,b)h - f_y(a,b)k = h\varepsilon_1 + k\varepsilon_2$$

$$\frac{|\varepsilon(a,b;h,k)|}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{|h\varepsilon_1 + k\varepsilon_2|}{\sqrt{h^2+k^2}} \le |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| \to 0 \quad (\sqrt{h^2+k^2} \to 0).$$

■

1.4　高階偏微分 (higher order partial differentials)

高次の偏微分で x, y の順序が異なると同じになるとは限らないと述べたが,

例 7　$f(x,y) = \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ $((x,y) \neq (0,0))$, $= 0$ $((x,y) = (0,0))$ に対し, $f_{xy}(0,0) = -1$, $f_{yx}(0,0) = 1$ となる.

問 1.7　上の例を確かめよ.

しかし次のことが成り立つ.

定理 30 (Schwarz の定理) $f(x,y)$ について点 (a,b) の近傍で f_x, f_y, f_{xy} が存在して, f_{xy} が (a,b) で連続なら, f_{yx} も存在して $f_{xy} = f_{yx}$. 特に f が C^2 級なら成り立つ. 更に f が C^n 級なら n 次までの偏導関数は偏微分の順序によらない.

これの証明のために

問 1.8 多変数関数の極限と 2 重極限に関して次を示せ: (ε-δ 論法で示せる.)

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \alpha \Rightarrow {}^{\exists}\lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x,y) = {}^{\exists}\lim_{y\to a}\lim_{x\to b} f(x,y) = \alpha.$$

[証明] $\Phi(x,y) := f(x,y) - f(x,b)$ とおく. 十分小さい h,k を固定して, 変数 x についての平均値の定理より, ${}^{\exists}\theta \in (0,1)$;

$$\Delta := \Phi(a+h,b+k) - \Phi(a,b+k) = h\Phi_x(a+\theta h, b+k) = h\{f_x(a+\theta h, b+k) - f_x(a+\theta h, b)\}$$

さらに関数 $f_x(a+\theta h, y)$ の変数 y についての平均値の定理より, ${}^{\exists}\theta' \in (0,1)$; $\Delta = hkf_{xy}(a+\theta h, b+\theta' k)$. ここで $\lim\limits_{k\to 0}\Phi(x,b+k)/k = f_y(x,b)$ から, $k \to 0$ なら $\Delta/k = \{\Phi(a+h,b+k) - \Phi(a,b+k)\}/k \to f_y(a+h,b) - f_y(a,b)$ より,

$$f_y(a+h,b) - f_y(a,b) = h\lim_{k\to 0} f_{xy}(a+\theta h, b+\theta' k).$$

従って f_{xy} が (a,b) で連続なことから, 上の問を用いて,

$$\begin{aligned} f_{xy}(a,b) &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} f_{xy}(a+\theta h, b+\theta' k) \\ &= \lim_{h\to 0}\lim_{k\to 0} f_{xy}(a+\theta h, b+\theta' k) \\ &= \lim_{h\to 0}\{f_y(a+h,b) - f_y(a,b)\}/h \\ &= f_{yx}(a,b) \end{aligned}$$

■

1.5 合成関数の微分 (differentials of composite functions)

定理 31 $z = f(x,y)$ が領域 D で全微分可能 (C^n 級), $x = x(t), y = y(t)$ ともに区間 I で微分可能 (C^n 級), かつ, $(x(t), y(t)) \in D$ $(t \in I)$ なら $z = f(x(t), y(t))$ も t について I で微分可能 (C^n 級) で,

$$\frac{dz}{dt} = f_x(x(t),y(t))x'(t) + f_y(x(t),y(t))y'(t). \quad \textbf{連鎖律 (chain rule)}$$

[証明] $\Delta x := x(t+\Delta t) - x(t)$, $\Delta y = y(t+\Delta t) - y(t)$ に対し, それぞれ $\Delta x =: (x'(t)+\varepsilon_1)\Delta t$, $\Delta y =: (y'(t)+\varepsilon_2)\Delta t$ とおくと $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$ $(\Delta t \to 0)$. 今 $\Delta f(x,y) := f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y + \varepsilon(x,y;\Delta x,\Delta y)$ に代入して, $\Delta z(t) := z(t+\Delta t) - z(t) = \Delta f(x(t),y(t))$ より (中の変数 $(x(t),y(t))$ は省略する)

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} - f_x x'(t) - f_y y'(t) = f_x\varepsilon_1 + f_y\varepsilon_2 + \frac{\varepsilon(x,y;\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\frac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{\Delta t}.$$

ここで $\Delta t \to 0$ のとき $\Delta x, \Delta y \to 0$ で, 全微分可能であることと, $\left(\dfrac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\dfrac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 \to x'(t)^2 + y'(t)^2$ より, 右辺は 0 に収束する. よって

$$\frac{dz}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t).$$

■

定理 32 $z = f(x, y)$ が領域 D で全微分可能 (C^n 級), $x = x(u, v), y = y(u, v)$ ともに領域 D_0 で偏微分可能 (C^n 級), かつ, $(x(u, v), y(u, v)) \in D$ ($(u, v) \in D_0$) なら $z = f(x(u, v), y(u, v))$ も (u, v) について D_0 で偏微分可能 (C^n 級) で,

$$z_u = z_x x_u + z_y y_u, \quad z_v = z_x x_v + z_y y_v.$$

[証明] v を固定して u だけの関数とみれば, 前の定理より明らか. ■

例 8 $z = f(x, y)$: C^2 級, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ なら

$$z_x^2 + z_y^2 = z_r^2 + \frac{1}{r^2} z_\theta^2, \quad z_{xx} + z_{yy} = z_{rr} + \frac{1}{r} z_r + \frac{1}{r^2} z_{\theta\theta}.$$

問 1.9 上の例を確かめよ.

定理 33 (平均値の定理 (mean value theorem)) $z = f(x, y)$ が領域 D で全微分可能, D の任意の 2 点 $(x, y), (x + h, y + k)$ を結ぶ線分が D に含まれていたら $^\exists\theta \in (0, 1)$;

$$f(x + h, y + k) - f(x, y) = hf_x(x + \theta h, y + \theta k) + kf_y(x + \theta h, y + \theta k).$$

[証明] $\varphi(t) := f(x + ht, y + kt)$ $(0 \le t \le 1)$ として 1 変数の平均値の定理と合成関数の微分を用いれば良い. 実際, $^\exists\theta \in (0, 1)$; $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta) = hf_x(x + \theta h, y + \theta k) + kf_y(x + \theta h, y + \theta k)$. ■

定理 34 (Taylor の定理 (Taylor's theorem)) 関数 $f(x_1, x_2)$ が領域 D 上で C^n 級 ($n \ge 1$) とし, 線分 $\{(a_1 + th_1, a_2 + th_2) : 0 \le t \le 1\}$ が D に含まれるとする. (ただし $(h_1, h_2) \neq (0, 0)$) このとき $0 < {}^\exists\theta < 1$;

$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}(h_1\partial_1 + h_2\partial_2)^k f(a_1, a_2) + \frac{1}{n!}(h_1\partial_1 + h_2\partial_2)^n f(a_1 + \theta h_1, a_2 + \theta h_2),$$

ここで $\partial_i = \partial/\partial x_i$ で,

$$(h_1\partial_1 + h_2\partial_2)^k f(x_1, x_2) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} h_1^j h_2^{k-j} \frac{\partial^k}{\partial x_1^j \partial x_2^{k-j}} f(x_1, x_2)$$

とする.

[証明] $\varphi(t) = f(a_1 + th_1, a_2 + th_2)$ に 1 変数の Taylor の定理を用いてから $t = 1$ を代入すれば良い. 実際, $^\exists\theta \in (0, 1)$;

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \frac{\varphi''(0)}{2!}t^2 + \cdots + + \frac{\varphi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}t^{n-1} + \frac{\varphi^{(n)}(\theta)}{n!}t^n.$$

さらに

$$\begin{aligned}\varphi^{(k)}(t) &= \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}h_1^j h_2^{k-j}\frac{\partial^k}{\partial x_1^j \partial x_2^{k-j}}f(a_1+h_1t, a_2+h_2t) \\ &= (h_1\partial_1+h_2\partial_2)^k f(a_1+h_1t, a_2+h_2t).\end{aligned}$$

より, 上式へ代入すれば求める式となる. ■

1.6 極大・極小 (relative maximum and relative minimum)

関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) で**極大** (**極小**) になるとは

$$^\exists U(a,b); ^\forall(x,y)\in U(a,b); (x,y)\neq(a,b), f(a,b)>f(x,y) \quad (f(a,b)<f(x,y))$$

をみたすときをいう. このとき $f(a,b)$ を**極大値** (**極小値**) といい, 合わせて**極値**という. また不等号が $\geq$ ($\leq$) で成り立つとき, **広義の極大** (**広義の極小**) であるといい, 合わせて**広義の極値**という.

偏微分可能な関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) で極値をもつなら, $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ ($\nabla f(a,b)=(0,0)$) となることが容易に分る. (もちろん逆は一般に成り立たない. が, $\nabla f(a,b)=(0,0)$ ならそこで極値をもつ可能性はある.)

定理 35 (極値の判定条件) $f(x,y)$ は点 $\mathrm{P}_0=(x_0,y_0)$ の近くで C^2 級とする. $\nabla f(\mathrm{P}_0)=\mathbf{0}$ のとき, $D:=(f_{xy}^2-f_{xx}f_{yy})(\mathrm{P}_0)$ ($=-H$ とする教科書もある) に対し,

(1) $D<0, f_{xx}(\mathrm{P}_0)>0 \Rightarrow f(\mathrm{P}_0)$ 極小値,

(2) $D<0, f_{xx}(\mathrm{P}_0)<0 \Rightarrow f(\mathrm{P}_0)$ 極大値,

(3) $D>0 \Rightarrow f(\mathrm{P}_0)$ 極値でない

[証明] $|h|,|k|$ 十分小なら, Taylor の定理より $0<{}^\exists\theta<1$;

$$\begin{aligned}\Delta f &:= f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0,y_0) \\ &= (h\partial_x+k\partial_y)^2 f(x_0+h\theta, y_0+k\theta)/2 \\ &= (h^2f_{xx}+2hkf_{xy}+k^2f_{yy})(x_0+h\theta, y_0+k\theta)/2\end{aligned}$$

と表せるから $|h|,|k|$ 十分小で同時に 0 でなければ f_{xx},f_{xy},f_{yy} の連続性から, (a) の条件のもと, $\Delta f>0$, (b) のもとで $\Delta f<0$ がすぐに分かる. (c) のもとでは, $k\neq 0$ なら $(f_{xx}(h/k)^2+2f_{xy}(h/k)+f_{yy})(x_0,y_0)$ が h/k の値によって正にも負にもなることに注意して, $h/k=c$ (一定) のまま $h,k\to 0$ とすれば,

$$\Delta f/k^2 \to (f_{xx}c^2+2f_{xy}c+f_{yy})(x_0,y_0)$$

より, $|h|,|k|$ 十分小なら, Δf も正にも負にもなることが分かる. ■

例題 3 次の関数 $f(x,y)$ の極値を求めよ. (1) $x^3-3xy+y^3$ (2) x^4+y^4 (3) x^3+y^3

[(1) 極小 $f(1,1)=-1$, (2) 極小 $f(0,0)=0$, (3) 極値なし]

さて極値をとる点では最大・最小となる可能性もあるが「連続関数は有界閉集合上で最大値・最小値をもつ」という定理と合わせて, 最大・最小について考えてみる.

例題 4 平面上の n 個の点 $\mathrm{A}_i(x_i, y_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ に対し, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathrm{PA}_i^2$ が最小となる点 P の座標 (x, y) を求めよ. (なぜそこで最小となるかも説明せよ.)

[解] $f(x,y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathrm{PA}_i^2 = \sum_{i=1}^{n}[(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2]$ とおく. $C = f(0,0) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + y_i^2)$ として, $|x| \to \infty$ or $|y| \to \infty$ なら $f(x,y) \to \infty$ より, $^\exists a \gg 1; S = \{x^2 + y^2 \le a^2\}$ の外, 及び, 境界上では $f(x,y) > C$ とできる. よって $f \le C$ on $\mathbf{Int}\, S$. 今, $f(x,y)$ は連続関数 (C^∞) で, S は有界閉集合だから最大値・最小値を S でもつ. 従って最小値は S の内点でもつ. そこでは $\nabla f = \mathbf{0}$ となるので, $0 = f_x(x,y) = 2(nx - \sum_i x_i)$, $0 = f_y(x,y) = 2(ny - \sum_i y_i)$. これの解は $(x,y) = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i/n, \sum_{i=1}^{n} y_i/n\right)$ のみで, 結局, これが S での, 従って, 平面全体での最小値を与える点となる. ■

1.7 陰関数定理, 条件付き極値 (implicit function theorem, constrained extremum)

関数 $f(x,y)$ に対し, ある適当な区間で, 関数 $^\exists\varphi(x); f(x, \varphi(x)) = 0$ をみたすとき $y = \varphi(x)$ を $f(x,y) = 0$ によって定まる**陰関数 (implicit function)** という.

例えば $ax + y - 2 = 0$ なら $y = -ax + 2$ だが, $x^2 + y^2 = 1$ なら $y = \pm\sqrt{1-y^2}$ というように唯一つとは限らない. その陰関数が一つだけ決まるための十分条件が次で与えられる.

定理 36 (陰関数定理 (2 変数)) $f(x,y)$ は点 (a,b) のある近傍で C^1 級とする. $f(a,b) = 0$, $f_y(a,b) \ne 0$ なら $^\exists\varphi(x); C^1$ 級 on $^\exists I$ ($x = a$ を含むある開区間); $b = \varphi(a)$, $f(x, \varphi(x)) = 0$. しかもこのような関数 $y = \varphi(x)$ は一意に決まり,

$$\varphi'(x) = -\frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))}.$$

更に $f(x,y)$ が C^n 級なら φ もそうなる.

[証明] $f_y(a,b) > 0$ として示す (負のときも同様). f_y の連続性から (a,b) を中心とする十分小さい円の内部 U で $f_y > 0$. よって $^\exists\delta > 0; ^\forall(x,y); |x-a| \le \delta, |y-b| \le \delta, f_y(x,y) > 0$. x を固定すれば $f(x,y)$ は狭義単調増加だから, $x = a$ のとき, $f(a, b-\delta) < f(a,b) = 0 < f(a, b+\delta)$. 更に $f(x,y)$ の x についての連続性から

$$^\exists 0 < \delta_1 < \delta; ^\forall x \in I := (a - \delta_1, a + \delta_1), f(x, b-\delta) < 0 < f(x, b+\delta).$$

従って, 各 $x \in I$ に対し, $f(x,y)$ が y について連続なので, 中間値の定理より, $^{\exists_1} y =: \varphi(x); 0 = f(x,y) = f(x, \varphi(x))$ (y について狭義単調増加なので, この y は唯一つだけ決まる). 特に $x = a$ なら $f(a,b) = 0$ より $\varphi(a) = b$. 次に φ' について, $y = \varphi(x), \Delta y = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)$ とおいて, 2 変数関数の平均値の定理から $0 < {^\exists\theta} < 1$;

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x,y) + f_x(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y)\Delta x + f_y(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y)\Delta y.$$

今, $f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x + \Delta x, \varphi(x + \Delta x)) = 0$, $f(x,y) = f(x, \varphi(x)) = 0$ だから

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{f_x(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y)}{f_y(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y)}.$$

f_x, f_y が連続なことに注意して, 右辺は有界だから $\Delta x \to 0$ のとき $\Delta y \to 0$, 即ち, $\varphi(x)$ は連続で,

$$\varphi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))}.$$

よって $\varphi(x)$ は微分可能で, 更に上の表現から $\varphi'(x)$ は I で連続, i.e., $\varphi(x)$ は I で C^1 級となる. 一意性については $y = \psi(x)$ も同じ条件 (I で C^1 級, $b = \psi(a)$, $f(x, \psi(x)) = 0$) をみたすとすると平均値の定理より, ${}^\exists\theta \in (0, 1)$;

$$0 = f(x, \varphi(x)) - f(x, \psi(x)) = \{\varphi(x) - \psi(x)\} f_y(x, \psi(x) + \theta(\varphi(x) - \psi(x))).$$

ここで $(x, \psi(x)+\theta(\varphi(x)-\psi(x))) \in U$ より, $f_y(x, \psi(x)+\theta(\varphi(x)-\psi(x))) > 0$. 従って $\varphi(x) = \psi(x)$. ■

同様にして, 次も示せる.

定理 37 (陰関数定理 (3 変数)) $f(x, y, z)$ は点 (a, b, c) のある近傍で C^1 級とする. $f(a, b, c) = 0$, $f_z(a, b, c) \neq 0$ なら $y = {}^\exists\varphi(x, y)$: C^1 級 on ${}^\exists U$ ((a, b) を含むある開近傍); $c = \varphi(a, b)$, $f(x, y, \varphi(x, y)) = 0$. しかも

$$\varphi_x(x, y) = -\frac{f_x(x, y, \varphi(x, y))}{f_z(x, y, \varphi(x, y))}, \quad \varphi_y(x, y) = -\frac{f_y(x, y, \varphi(x, y))}{f_z(x, y, \varphi(x, y))}.$$

更に $f(x, y, z)$ が C^n 級なら φ もそうなる.

2 変数のときのように 3 変数関数 $f(x, y, z)$ に対しても, **勾配 (gradient)** を $\nabla f \equiv \mathrm{grad}\, f := (f_x, f_y, f_z)$ として定義する. 図形 S; $f(x, y, z) = 0$ は $f(x, y, z)$ が C^1 級で S 上 (i.e., $f(x, y, z) = 0$ をみたす点 (x, y, z) で) $\nabla f \neq 0$ なら, **滑らかな曲面**という. ($\mathrm{P}_0 = (a, b, c) \in S$ に対し, $\nabla f(\mathrm{P}_0) \neq 0$ より, 仮に $f_z(\mathrm{P}_0) \neq 0$ とすると, 陰関数定理より, P_0 の近傍で ${}^\exists\varphi(x, y)$; C^1 級, $f(x, y, \varphi(x, y) = 0$, i.e., $z = \varphi(x, y)$ と表されるので, 曲面を意味する.)

注 $z = \varphi(x, y)$ と表されている曲面は, $f(x, y, z) = z - \varphi(x, y)$ と考えて, $f_z = 1 \neq 0$ から滑らかな曲面となる.

今, S 上の曲線 $C : \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ を考えると $f(x(t), y(t), z(t)) = 0$. これを t で微分して, $f_x x' + f_y y' + f_z z' = 0$, i.e., $\nabla f \cdot \mathbf{r}' = 0$. これは曲線 C 上の勝手な接ベクトルと ∇f が直交することを意味する. このことから ${}^\forall\mathrm{P} \in S$, $\nabla f(\mathrm{P}) = \mathrm{grad}\, f(\mathrm{P})$ を S の点 P における **法線ベクトル**という. またこれに直交する平面を S の点 P における**接平面**という. この方程式は $\mathrm{P} = (a, b, c)$ として次で与えられる:

$$f_x(\mathrm{P})(x - a) + f_y(\mathrm{P})(y - b) + f_z(\mathrm{P})(z - c) = 0.$$

問 1.10 曲面 $z = f(x, y)$ 上の点 (a, b, c) における接平面の方程式が次で与えられることを示せ.

$$z - c = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b).$$

【ラグランジュの未定乗数法】

定理 38 (条件付き極値 (2 変数バージョン)) 関数 $\varphi(x, y), f(x, y)$ を C^1 級とする. 空間上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ が条件 $\varphi(x, y) = 0$ をみたしながら動くものとする. 関数 f が点 $\mathrm{P} = \mathrm{P}_0(x_0, y_0)$ で広義の極値をもつなら $\nabla\varphi(\mathrm{P}_0) = \mathbf{0}$ であるか, そうでないなら, ${}^\exists\lambda$ 定数; $\nabla f(\mathrm{P}_0) = \lambda\nabla\varphi(\mathrm{P}_0)$.

[証明] $\nabla\varphi(\mathrm{P}_0) \neq \mathbf{0}$, 特に, $\varphi_y(P_0) \neq 0$ として, λ を見付ければ良い. ($\varphi_x(P_0) \neq 0$ の時も同様である.) $\varphi_y(P_0) \neq 0$ なので, 2 変数の陰関数定理より, $\mathrm{P}_0(x_0, y_0)$ の近傍で ${}^\exists y = y(x)$: C^1 級; $\varphi(x, y(x)) = 0$. これから $\varphi_x + \varphi_y y' = 0$, i.e., $-y' = \varphi_x/\varphi_y$. また $f(\mathrm{P}_0)$ が広義の極値より, $u(x) := f(x, y(x))$ は x_0 で広義の極値をとる. 即ち, x_0 で, $0 = u' = f_x + f_y y'$. つまり, $f_x = -f_y y' = (f_y/\varphi_y)\varphi_x$. また, $f_y = (f_y/\varphi_y)\varphi_y$ なので, $\lambda := f_y/\varphi_y(\mathrm{P}_0)$ とおけば良い. ■

定理 39 (条件付き極値 (3 変数バージョン)) 関数 $\varphi(x,y,z), f(x,y,z)$ を C^1 級とする. 空間上の点 $\mathrm{P}(x,y,z)$ が条件 $\varphi(x,y,z)=0$ をみたしながら動くものとする. 関数 f が点 $\mathrm{P}=\mathrm{P}_0(x_0,y_0,z_0)$ で広義の極値をもつなら $\nabla\varphi(\mathrm{P}_0)=\mathbf{0}$ であるか, そうでないなら, $^\exists\lambda$ 定数; $\nabla f(\mathrm{P}_0)=\lambda\nabla\varphi(\mathrm{P}_0)$.

[証明] $\nabla\varphi(\mathrm{P}_0)\neq\mathbf{0}$, 特に, $\varphi_z(P_0)\neq 0$ として, λ を見付ければ良い. ($\varphi_x(P_0)\neq 0$ or $\varphi_y(P_0)\neq 0$ の時も同様である.) $\varphi_z(P_0)\neq 0$ なので, 3 変数の陰関数定理より, $\mathrm{P}_0=(x_0,y_0,z_0)$ の近傍で $^\exists z=z(x,y)$: C^1 級; $\varphi(x,y,z(x,y))=0$. これから $\varphi_x+\varphi_z z_x=\varphi_y+\varphi_z z_y=0$. また $f(\mathrm{P}_0)$ が広義の極値より, $u(x,y):=f(x,y,z(x,y))$ は (x_0,y_0) で広義の極値をとる. (x_0,y_0) で, $\nabla u=\mathbf{0}$ を書き下して, $z_x=-\varphi_x/\varphi_z, z_y=-\varphi_y/\varphi_z$ を代入して,

$$f_x=\frac{f_z}{\varphi_z}\varphi_x,\ f_y=\frac{f_z}{\varphi_z}\varphi_y,\quad \text{また}\quad f_z=\frac{f_z}{\varphi_z}\varphi_z$$

をえるから, $\lambda:=f_z/\varphi_z(\mathrm{P}_0)$ とおけば良い. ■

例題 5 $x^2+y^2=1$ のとき, $2x^2-xy+y^2$ の最大値・最小値を求めよ.

[解] $S=\{x^2+y^2=1\}$ は有界閉集合であるから, $f(x,y)=2x^2-xy+y^2$ は S で最大値・最小値をもつ. よってそこで広義の極値をもつ. その点を P とする. $\varphi(x,y)=x^2+y^2-1$ とおくと $f(x,y),\varphi(x,y)$ は C^1 級, かつ, S で $\nabla\varphi=(2x,2y)\neq 0$ であるから, ラグランジュの未定乗数法により, $^\exists\lambda;\nabla f(\mathrm{P})=\lambda\nabla\varphi(\mathrm{P})$ これと $\varphi(\mathrm{P})=0$ を解けばよい. $\lambda=(3\pm\sqrt{2})/2$ となり, 最大値 $(3+\sqrt{2})/2$, 最小値 $(3-\sqrt{2})/2$ をえる. ■

1.8 逆写像定理 (inverse mapping theorem)

領域 D 上の C^1 級の関数 $f_k(x_1,\ldots,x_n)$ $(k=1,\ldots,n)$ に対し,

$$J=\frac{\partial(f_1,\ldots,f_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}:=\det\begin{pmatrix}\partial f_1/\partial x_1 & \partial f_1/\partial x_2 & \ldots & \partial f_1/\partial x_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \partial f_n/\partial x_1 & \partial f_n/\partial x_2 & \ldots & \partial f_n/\partial x_n\end{pmatrix}$$

を **Jacobian** or **関数行列式**という.

例 9 $u=ax+by, v=cx+dy$ (a,b,c,d は定数) なら

$$J=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\det\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=ab-bc$$

このとき $J\neq 0$ なら $x=(du-bv)/J, y=(-cu+av)/J$.

例 10 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ なら

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\det\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}=r$$

問 1.11 Jacobian を計算せよ. (1) $u=x+y, v=xy$ (2) $x=r\sin\theta\cos\varphi, y=r\sin\theta\sin\varphi, z=r\cos\theta$

定理 40 (逆写像定理) $F(x,y)=(f(x,y),g(x,y))$ を領域 D 上の C^1 級関数とする (i.e., f,g が D で C^1 級). ある点 $(x_0,y_0)\in D$ で Jacobian

$$J=\det\begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix}\neq 0$$

ならば, (x_0,y_0) のある近傍 U で, F は 1-1 で, $V=F(U)$ も領域で, $^{\exists}G(u,v)=(p(u,v),q(u,v))$; C^1 級関数, $F\circ G=I$ on V, i.e., $f(p(u,v),q(u,v))=u, g(p(u,v),q(u,v))=v$. また $G\circ F=I$ on U. これから $G=F^{-1}$ となる.

これの証明は, 次の n 変数バージョンにおいて, より一般的に証明する.

1.9 n 変数バージョン (n variables version)

定理 41 $z=f(x_1,\dots,x_n)$ が領域 D で全微分可能 (C^k 級), $x_i=x_i(t)$ が区間 I で微分可能 (C^k 級), かつ, $(x_1(t),\dots,x_n(t))\in D$ $(t\in I)$ なら $z=f(x_1(t),\dots,x_n(t))$ も $t\in I$ で微分可能 (C^k 級) で,

$$\frac{dz}{dt}=\sum_{i=1}^n \partial_i f(x_1(t),\dots,x_n(t))x_i'(t).$$

この式は, $dx_i=x_i'(t)dt$ として, 形式的に $dz=\displaystyle\sum_{i=1}^n \partial_i f(x_1,\dots,x_n)dx_i$ と表すこともある.

定理 42 (Taylor の定理) 関数 $f(x_1,\dots,x_n)$ が領域 D 上で C^k 級（$k\geq 1$）とし, 線分 $\{(a_1+th_1,\dots,a_n+th_n):0\leq t\leq 1\}$ が D に含まれるとする. (ただし $(h_1,\dots,h_n)\neq\mathbf{0}$) このとき $0<{}^{\exists}\theta<1$;

$$\begin{aligned} f(a_1+h_1,\dots,a_n+h_n) &= \sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{j!}(h_1\partial_1+\cdots+h_n\partial_n)^j f(a_1,\dots,a_n) \\ &\quad +\frac{1}{k!}(h_1\partial_1+\cdots+h_n\partial_n)^k f(a_1+\theta h_1,\dots,a_n+\theta h_n), \end{aligned}$$

ここで $\partial_i=\partial/\partial x_i$ で,

$$(h_1\partial_1+\cdots+h_n\partial_n)^j f(x_1,\dots,x_n):=\sum_{j_1,\dots,j_n\geq 0; j_1+\cdots+j_n=j}\frac{j!}{j_1!\cdots j_n!}h_1^{i_1}\cdots h_n^{j_n}\frac{\partial^j f(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_1^{j_1}\cdots\partial x_n^{j_n}}.$$

これをベクトル $\boldsymbol{h}=(h_1,\dots,h_n)$ を用いて表すと次のように簡単になる:

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})=\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{j!}(\boldsymbol{h}\cdot\mathbf{D})^j f(\boldsymbol{a})+\frac{1}{k!}(\boldsymbol{h}\cdot\mathbf{D})^k f(\boldsymbol{a}+\theta\boldsymbol{h}),$$

但し, $\mathbf{D}=(\partial_1,\dots,\partial_n)$ で, $\boldsymbol{h}\cdot\mathbf{D}=h_1\partial_1+\cdots+h_n\partial_n$ である.

定理 43 (極値の判定条件) $f(x_1,\dots,x_n)$ は点 $\mathrm{P}=(a_1,\dots,a_n)$ の近くで C^2 級とする. $\nabla f(\mathrm{P})=0$ のとき, n 次対称行列 $[\partial_{ij}^2 f(P)]$ (ヘッセ行列という) の固有値が

(1) 全て正 $\Rightarrow$ $f(\mathrm{P})$ 極小値, (2) 全て負 $\Rightarrow$ $f(\mathrm{P})$ 極大値, (3) 正負混在 $\Rightarrow$ $f(\mathrm{P})$ 極値でない

[証明] $|h_1|,\dots,|h_n|$ 十分小なら, Taylor の定理より $^\exists\theta\in(0,1)$;

$$\begin{aligned}\Delta f &:= f(a_1+h_1,\dots,a_n+h_n)-f(a_1,\dots,a_n)\\ &= (h_1\partial_1+\cdots+h_n\partial_n)^2 f(a_1+\theta h_1,\dots,a_n+\theta h_n)/2\\ &= \sum_{i,j=1}^n h_ih_j\partial_{ij}^2 f(a_1+\theta h_1,\dots,a_n+\theta h_n)/2.\end{aligned}$$

$(h_1,\dots,h_n)\neq\mathbf{0}$ に対し, 2 次形式 $\displaystyle\sum_{i,j=1}^n h_ih_j\partial_{ij}^2 f(\mathrm{P})$ は, 固有値が全て正 (負) なら正 (負) となる. そうでなければ正にも負にもなる. このことと $\partial_{ij}^2 f$ の連続性から, Δf も同様であることが分る. ■

定理 44 (陰関数定理 (一般形)) $\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_n),\boldsymbol{y}=(y_1,\dots,y_p)$ として, 各 $i=1,\dots,p$ に対し, $f_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ は 点 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ のある近傍で C^1 級で, $f_i(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0$ とする. このとき $J=\dfrac{\partial(f_1,\dots,f_p)}{\partial(y_1,\dots,y_p)}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\neq 0$ なら, 各 $i=1,\dots,p$ に対し, $^\exists\varphi_i(\boldsymbol{x})$: C^1 級 on $^\exists U$ ($\boldsymbol{a}$ を含むある開近傍); $b_i=\varphi_i(\boldsymbol{a})$, $f_i(\boldsymbol{x},\varphi_1(\boldsymbol{x}),\dots,\varphi_p(\boldsymbol{x}))=0$. しかも全微分 $d\varphi_i(\boldsymbol{x})=\displaystyle\sum_{j=1}^n\partial_j\varphi_i(\boldsymbol{x})dx_j$ は次の連立一次方程式の解となる.

$$\sum_{j=1}^n\frac{\partial f_k}{\partial x_j}dx_j+\sum_{i=1}^p\frac{\partial f_k}{\partial y_i}d\varphi_i=0\quad(k=1,\dots,p).$$

[証明] 簡単のため $n=1,p=2$ の場合を示す. $J=\det\begin{pmatrix}\partial_{y_1}f_1 & \partial_{y_2}f_1\\ \partial_{y_1}f_2 & \partial_{y_2}f_2\end{pmatrix}(a,b_1,b_2)\neq 0$ より, 点 (a,b_1,b_2) で, $\partial_{y_1}f_1\neq 0$ or $\partial_{y_2}f_1\neq 0$. そこで, $\partial_{y_2}f_1(a,b_1,b_2)\neq 0$ として考える. 陰関数定理より (a,b_1) の近傍で $^\exists\psi(x,y_1)$; C^1 級, $b_2=\psi(a,b_1), f_1(x,y_1,\psi(x,y_1))=0, \psi_{y_1}=-\partial_{y_1}f_1/\partial_{y_2}f_1$. そこで $g(x,y_1):=f_2(x,y_1,\psi(x,y_1))$ とおくと, g は (a,b_1) の近傍で C^1 級で

$$\partial_{y_1}g=\partial_{y_1}f_2+\partial_{y_2}f_2\psi_{y_1}=\partial_{y_1}f_2+\partial_{y_2}f_2(-\partial_{y_1}f_1/\partial_{y_2}f_1)=-(\partial_{y_1}f_1\partial_{y_2}f_2-\partial_{y_2}f_1\partial_{y_1}f_2)/\partial_{y_2}f_1.$$

従って, $\partial_{y_1}g(a,b_1)=-J/\partial_{y_2}f_1(a,b_1,b_2)\neq 0$. しかも $g(a,b_1)=f_2(a,b_1,b_2)=0$. 再び, 陰関数定理より, $^\exists I$: a を含む開区間, $^\exists\varphi_1(x)$: C^1 級 on I; $b_1=\varphi_1(a), g(x,\varphi_1(x))=0$. ここで $\varphi_2(x):=\psi(x,\varphi_1(x))$ とおけば, これらが求めるものとなる. 実際, I において, $f_1(x,\varphi_1(x),\psi(x,\varphi_1(x)))=0$ と $0=g(x,\varphi_1(x))=f_2(x,\varphi_1(x),\psi(x,\varphi_1(x)))$ から $f_1(x,\varphi_1(x),\varphi_2(x))=f_2(x,\varphi_1(x),\varphi_2(x))=0$ で, これを x で微分すれば, φ_1',φ_2' が次の解であることが分る.

$$\partial_x f_1+\partial_{y_1}f_1\varphi_1'+\partial_{y_2}f_1\varphi_2'=\partial_x f_2+\partial_{y_1}f_2\varphi_1'+\partial_{y_2}f_2\varphi_2'=0.$$

言い換えれば, $d\varphi_1,d\varphi_2$ が次の連立方程式の解となる. 但し, $d\varphi_i=\varphi_i(x)dx$.

$$\partial_x f_1dx+\partial_{y_1}f_1d\varphi_1+\partial_{y_2}f_1d\varphi_2=\partial_x f_2dx+\partial_{y_1}f_2d\varphi_1+\partial_{y_2}f_2d\varphi_2=0.$$

■

定理 45 (逆写像定理) $F:\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_n)\mapsto\boldsymbol{y}=(y_1,\dots,y_n)$ を領域 $D\subset\mathbf{R}^n$ 上の C^1 級関数とする (i.e., 各 y_i が D で C^1 級). ある点 $\boldsymbol{a}=(a_1,\dots,a_n)\in D$ で Jacobian

$$J_F(\boldsymbol{a})\equiv\frac{\partial\boldsymbol{y}}{\partial\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{a}):=\det(dF)(\boldsymbol{a})\neq 0,\quad \text{但し},\ dF=\left[\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right]\ \ (\text{中身を } (i,j) \text{ 成分とする } n \text{ 次行列}).$$

ならば, $\boldsymbol{a}$ のある近傍 $U = U(\boldsymbol{a})$ で F は 1-1 で, $V = F(U)$ も領域で, $^\exists G : V \to U$; C^1 級関数, $F \circ G = I$ on V, $G \circ F = I$ on U, i.e., $G = F^{-1}$, しかも $G : V \to U; \boldsymbol{y} \mapsto \boldsymbol{x}$ として, $dG = d(F^{-1}) = \left[\dfrac{\partial x_i}{\partial y_j}\right]$ に対し, $d(F^{-1}) = (dF)^{-1}$ (逆行列) が成り立つ.

[証明] 変数としての y_i と関数としての $y_i(\boldsymbol{x})$ を区別するため, 関数の方を $f_i(\boldsymbol{x})$ とおく. また $\boldsymbol{b} = F(\boldsymbol{a})$ とする. $h_i(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) := f_i(\boldsymbol{x}) - y_i$ $(i = 1, \dots, n)$ とすると, $h_i(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = 0$, かつ,

$$\frac{\partial(h_1, \dots, h_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(\boldsymbol{a}) = J_F(\boldsymbol{a}) \neq 0.$$

従って, 上の陰関数定理より, 各 $i = 1, \dots, n$ に対し, $^\exists g_i(\boldsymbol{y})$: C^1 級 on $^\exists V'$ ($\boldsymbol{b}$ を含むある開近傍);

$$f_i(g_1(\boldsymbol{y}), \dots, g_p(\boldsymbol{y})) - y_i = h_i(\boldsymbol{y}, g_1(\boldsymbol{y}), \dots, g_p(\boldsymbol{y})) = 0, \quad a_i = g_i(\boldsymbol{b}), \quad (i = 1, \dots, n).$$

即ち, $G(\boldsymbol{y}) := (g_1(\boldsymbol{y}), \dots, g_p(\boldsymbol{y}))$ は V' 上の C^1 級で, $F \circ G = I$ on V', $F(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}$ を満たす. さらに連鎖律より, $(dF)(dG) = E$ (n 次単位行列). ゆえに, $dG = (dF)^{-1}$. 行列式は $J_F J_G = 1$ より, $J_G = 1/J_F \neq 0$. この G について, 上と同じ議論で, $^\exists H(\boldsymbol{x})$: C^1 級 on $^\exists U$ ($\boldsymbol{a}$ の開近傍); $H : U \to V'$, $G \circ H = I$ on U, $H(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b}$. 所が, $H = I \circ H = (F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H) = F \circ I = F$ on U. 従って, $V = F(U)$ とすれば, $G \circ F = I$ on U, $F \circ G = I$ on V. また $V = F(U) = G^{-1}(U)$ で, G 連続より, V は開集合で, U 弧状連結で, F 連続より, V が弧状連結となることも明らかなので領域である. ■

問 1.12 $G : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$: 連続, $U \subset \mathbf{R}^m$: 開集合なら, $V = G^{-1}(U) \subset \mathbf{R}^n$ も開集合となることを示せ.

集合 $D \subset \mathbf{R}^n$ が, 任意の 2 点をその集合内の連続曲線で結べるときを弧状連結, D での相対位相で, 空でない 2 つの開集合に分割できないときを連結といったが, それらについて次の問を考える.

問 1.13 $\mathbf{R}^n$ の開集合が「連結 $\iff$ 弧状連結」を次の手順で示せ.

(1) 一般の位相空間 $(X, \mathcal{O})$ で弧状連結なら連結

(a) $[0,1]$ は連結で, また連結集合の連続写像による像も連結.

(b) M_λ 連結 $(\lambda \in \Lambda)$, ${}^\exists x \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ なら $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ も連結.

(2) $\mathbf{R}^n$ の開集合 G が連結なら弧状連結.

(a) G: 開において, $a \in G$ に対し, a と連続曲線で結べる点の全体 $G(a)$ も開.

[解] (1) 一般の位相空間 $(X, \mathcal{O})$ で弧状連結なら連結を示す.
$a \in X$ を一つ固定する. 仮定から, ${}^\forall b \in X, {}^\exists f : [0,1] \to X$; a, b を結ぶ連続曲線. このとき $[0,1]$ が連結で, f が連続なので, $f([0,1])$ も連結. $f([0,1]) \ni a, b$ なので, この和を考えれば, X と等しくなり, 従って X 自身も連結となる. 実際, $F \subset X$; 開かつ閉として, 上の $f([0,1]) =: M_b$ と表すことにすると, $F \cap M_b$ は M_b において, 相対位相で開かつ閉となり, M_b の連結性から, $F \cap M_b = \emptyset$ or $= M_b$ となる. もし ${}^\exists b; F \cap M_b = M_b$ なら $a \in F$ となり, ${}^\forall b, F \cap M_b \neq \emptyset$, i.e., $= M_b$ となるので, 結局, $F = X$. もし ${}^\forall b, F \cap M_b = \emptyset$ なら, $F = \emptyset$. 以上により, X は連結となる.

(2) $\mathbf{R}^n$ の開集合 G が連結なら弧状連結を示す.
まず, G において, $a \in G$ に対し, a と連続曲線で結べる点の全体を $G(a)$ と表すと, これは開集合となる. 実際, G: 開より, ${}^\forall b \in G(a), {}^\exists U(b) \subset G$ で, 開球 $U(b)$ は弧状連結なので, $U(b) \subset G(a)$ となる. 次に, もし, G が弧状連結でないとすると, ${}^\exists a, b \in G$; a, b は G 内の連続曲線で結べない. そこで, 上の $G(a)$ と $G' = \displaystyle\bigcup_{c \in G\setminus G(a)} G(c)$ を考えると $b \in G(b) \subset G'$ で, これらは G を分割する開集合となり, G が連結であることに矛盾する. よって, G は弧状連結. ■

問 1.14 $[0,1]$ が連結であることを示せ.

[解] $G \subset [0,1]; G \neq \emptyset$, 開かつ閉とする. $a \in G$ を固定し, $a < 1$ のとき, $R_a = \{x \in [0.1]; x > a, x \notin G\}$ とする. もし $R_a \neq \emptyset$ なら, ${}^\exists r := \inf R_a \geq a$.
(1) G 開より, $r > a$ が分るので, $[a, r) \subset G$.
(2) G 閉より, $r \in G$, i.e., $[a, r] \subset G$.
(3) 再び, G 開より, ${}^\exists \delta > 0; [a, r+\delta) \subset G$.
しかし, これは $r = \inf R_a \geq r + \delta$ となり矛盾. よって $[a, 1] \subset G$. $a > 0$ のときも同様に $[0, a] \subset G$ が分るので, 以上から $G = [0,1]$ を得る. ■

問 1.15 $(X, \mathcal{O})$ が連結で, $f : X \to Y$ 連続なら, $f(X)$ も連結であることを示せ.

[解] $G \subset f(X); G \neq \emptyset$, 開かつ閉とする. $f^{-1}(G) \subset U$: 開かつ閉で, $f^{-1}(G) \neq \emptyset$ なので, 仮定より, $f^{-1}(G) = U$. よって $G = f(X) \cap G = f(f^{-1}(G)) = f(X)$ となり, $f(X)$ も連結. ■

2 多変数関数の積分

平面上や空間上の関数の積分 (**重積分**) の定義は, 後で述べるように本質的には 1 次元での Riemann 積分と同じである. しかし実際の計算は, 変数ごとに順番に 1 次元の積分を実行して行くことにより行われる. (これを**順序積分**, **順次積分**, もしくは **累次積分**という.)

2.1 重積分の計算 1

そこで, 厳密な定義や理論は後回しにして, まずは問題を 1 つ解いてみよう.

例 1 重責分 $\iint_D (x+y)^\alpha dxdy$ $(\alpha > 0)$ の値を領域 D が次で与えられる場合にそれぞれ求めよ.

(1) $0 \le x, y \le 1$ (2) $0 \le y \le x \le 1$ [$2(2^{\alpha+1}-1)/\{(\alpha+1)(\alpha+2)\}$ とその半分]

(解) (1) x と y のどちらの積分を先にしても良いが, 例えば, y のを後にすると,

$$\begin{aligned}(与式) &= \int_0^1 dy \int_0^1 (x+y)^\alpha dx = \int_0^1 dy \left[\frac{1}{\alpha+1}(x+y)^{\alpha+1}\right]_{x=0}^{x=1} \\ &= \frac{1}{\alpha+1}\int_0^1 \left\{(1+y)^{\alpha+1} - y^{\alpha+1}\right\} dy \\ &= \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\left[(1+y)^{\alpha+2} - y^{\alpha+2}\right]_0^1 = \frac{2^{\alpha+2}-2}{(\alpha+1)(\alpha+2)} = \frac{2(2^{\alpha+1}-1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\end{aligned}$$

(2) 上と同じようにして

$$(与式) = \int_0^1 dy \int_y^1 (x+y)^\alpha dx \quad \text{or} \quad \int_0^1 dx \int_0^x (x+y)^\alpha dy$$

として計算しても良いが, 関数が $y = x$ に関して対称なので, (1) の半分になる.

(→ **問** 実際に, (2) の積分を計算し, (1) の半分となることを確かめよ.) ■

[重積分の定義と累次積分]

基本的に重積分 $\iint_D f(x,y)dxdy$ は積分範囲（領域）D を細かい長方形の集まり $\{D_k\}_{k=1}^n$ で近似して, その細分した各長方形 D_k での関数の 1 つの値 $f(x_k, y_k)$ $(x_k, y_k \in D_k)$ とその長方形の面積 $|D_k| = \Delta x_k \Delta y_k$ （$\Delta x_k, \Delta y_k$ は辺の長さ）をかけて, 全体で和をとったもの（**リーマン和, Riemann sum**）の極限として定義される (勿論, その値が近似の仕方によらず一意的に決まるとき), 即ち,

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n f(x_k, y_k)\Delta x_k \Delta y_k.$$

さらにこの長方形での近似を, もう少し一般の微小な図形にしても良い.

実際に積分の値を求めるには累次積分にして計算する. $D = \{\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x), a \le x \le b\}$ のとき,

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

更に $D = \{\psi_1(y) \le x \le \psi_2(y), c \le y \le d\}$ なら, 積分順序の交換も可能で,

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$$

1. 次の重積分の値を求めよ（括弧内は D を表す).

(1) $\iint_D x^2 y dxdy$ $(0 \le y \le \sqrt{1-x^2})$ (2) $\iint_D \sin(x+y)dxdy$ $(0 \le x, y, x+y \le \frac{\pi}{2})$

例 2 累次積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1} dx \int_{0}^{e^x} f(x,y)dy$ の積分順序を変えよ.

(解) 積分範囲 $\{0 \le y \le e^x, -1 \le x \le 1\}$ を図示して, まず y の動く最大範囲をみて, 次に y を止める毎に x がどういう範囲を動くか考える.

$$\left(\int_0^{e^{-1}} dy \int_{-1}^{1} dx + \int_{e^{-1}}^{e} dy \int_{\log y}^{1} dx\right) f(x,y)$$

2. 次の累次積分の積分順序を変えよ（$a > 0, 0 < \alpha < \beta$）.
(1) $\displaystyle\int_0^a dx \int_{\alpha x}^{\beta x} f(x,y)dy$ (2) $\displaystyle\int_a^{2a} dy \int_{y-a}^{y+a} f(x,y)dx$

例 3 広義積分 $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{(x-y)^\alpha} = \frac{1}{(1-\alpha)(2-\alpha)}$ $(D : 0 \le y < x \le 1, 0 < \alpha < 1)$ を確かめよ.

(解)

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int_0^1 dx \int_0^x (x-y)^{-\alpha} dy = \int_0^1 dx \left[\frac{-1}{1-\alpha}(x-y)^{1-\alpha}\right]_{y=0}^{y=x} \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\int_0^1 x^{1-\alpha} dx = \frac{1}{(1-\alpha)(2-\alpha)}\left[x^{2-\alpha}\right]_0^1 = \frac{1}{(1-\alpha)(2-\alpha)} \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

[広義積分と計算]

広義積分は 1 変数のときと同様に, 積分領域 D のある境界で, 被積分関数が定義されないとき, D を近似する領域の列 $\{D_n\}$ で, 各 D_n の上では積分が定義されるものを考え, そのときの極限が一意的に決まるとき, その値で定義される. しかし実際の計算では, 形式的にやっても差し障りは無い.

3. 次の広義積分の値を求めよ.
(1) $\displaystyle\iint_{x,y\ge 0} \frac{dxdy}{(1+x+y)^\alpha}$ $(\alpha > 2)$ (2) $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $(D : 0 \le y \le x \le 1, x > 0)$

---

1. $2/15, 1$ **3.** $1/\{(\alpha-1)(\alpha-2)\}, \log(1+\sqrt{2})$ （ヒント $(\log|x+\sqrt{x^2+a}|)' = ?$ $(a \ne 0)$）

2.2 重積分の計算 2

1 変数のときと同じように, 多変数の積分においても変数変換が可能であるが, 式は少し複雑になる. その中の典型的な変換についてまず計算してみよう.

例 4 (**一次変換**) $x = au + bv, y = cu + dv \to dxdy = |ad - bc|dudv$,
(**極座標変換**) $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta \to dxdy = rdrd\theta$ を用いて次を確かめよ.
(1) $\displaystyle\iint_{x,y\geq 0} \frac{|x-y|}{(1+x+y)^\alpha}dxdy = \frac{1}{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}$ $(\alpha > 3)$
(2) $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\leq a^2} \sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy = \frac{2\pi}{3}a^3$ $(a > 0)$

(解) (1) $x + y = u, x - y = v$ とすれば, $x = (u+v)/2, y = (u-v)/2$ で, $dxdy = dudv/2$. また, 積分範囲は $u \geq 0, |v| \leq u$ となる. 従って, 左辺は,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\iint_{u\geq 0,|v|\leq u} \frac{|v|}{(1+u)^\alpha}dudv &= \iint_{u\geq 0,0\leq v\leq u} \frac{v}{(1+u)^\alpha}dudv = \int_0^\infty du \int_0^u \frac{v}{(1+u)^\alpha}dv \\
&= \int_0^\infty \frac{u^2}{2(1+u)^\alpha}du = \int_1^\infty \frac{(t-1)^2}{2t^\alpha}dt = \frac{1}{2}\int_1^\infty (t^{2-\alpha} - 2t^{1-\alpha} + t^{-\alpha})dt \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha-3} - \frac{2}{\alpha-2} + \frac{1}{\alpha-1}\right) = \frac{1}{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}
\end{aligned}$$

(2) 極座標変換で $\{(x,y); x^2 + y^2 \leq a^2\}$ は $\{(r,\theta); 0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ に写り, 左辺は

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \sqrt{a^2-r^2}\ rdr = 2\pi \int_0^a \sqrt{a^2-r^2}rdr = 2\pi \left[\frac{-1}{3}(a^2-r^2)^{3/2}\right]_0^a = \frac{2\pi}{3}a^3.$$

[重積分の変数変換]
$[(x,y) \in D \leftrightarrow (u,v) \in E]$ $x = x(u,v), y = y(u,v)$: C^1 級, **Jacobian** $\partial(x,y)/\partial(u,v) \neq 0$ なら

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_E f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv, \quad \text{形式的に} \quad dxdy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv,$$

但し, Jacobian (ヤコビアン, 関数行列式とも言う) は

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}, \quad \text{ここで } x_u = \frac{\partial x}{\partial u} \ (u \text{ での偏微分}) \text{ を表す. 他も同様.}$$

三重積分のときも同様で, $f(x,y,z)$ に対し, $x = x(u,v,w), y = y(u,v,w), z = z(u,v,w)$ と変換,

$$dxdydz = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|dudvdw, \quad \text{但し,} \quad \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \det\begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix}.$$

(説明) 簡単のため平面で考える.

Riemann 和を考えるときに, 積分領域を近似する長方形を, もっと一般の微小な図形 (平行四辺形やもっと歪んだ形) にしても良い. そこで変数変換 $x = x(u,v), y = y(u.v)$ を考えるには xy 平面の微小な図形の面積が (u,v) でどう表されるかを考えれば良い. つまり u, v が微小に増えたとき, (例えば増分が $\Delta u, \Delta v$ のとき) $x(u,v), y(u.v)$ はどう変化するかということである. そのために uv 平面の 4 点 $(u,v), (u+\Delta u, v), (u, v+\Delta v), (u+\Delta u, v+\Delta v)$ を頂点とする正方形が, 上の変換により, xy 平面の 4 つの曲線で囲まれた図形で $A(x(u,v), y(u,v))$, $P(x(u+\Delta u, v), y(u+\Delta u, v))$, $Q(x(u, v+\Delta v), y(u, v+\Delta v))$, $R(x(u+\Delta u, v+\Delta v), y(u+\Delta u, v+\Delta v))$ を頂点にもつものに写される. その面積を記号で $\delta x\delta y$ と表すことにする. (ここでは, あくまでただの記号で $\delta x, \delta y$ 一つ一つには

意味はない.）この微小図形は $\vec{p}=\vec{AP}$, $\vec{q}=\vec{AQ}$ で作られる平行四辺形に非常に近く, さらに平均値の定理より $\Delta u, \Delta v$ が非常に小さいとき $\vec{p} \approx (x_u(u,v)\Delta u, y_u(u,v)\Delta u)$, $\vec{v} \approx (x_v(u,v)\Delta v, y_v(u,v)\Delta v)$ となることから

$$\begin{aligned} \delta x \delta y &\approx \sqrt{|\vec{p}|^2|\vec{q}|^2-(\vec{p}\cdot\vec{q})^2} \\ &\approx |x_u y_v - x_v y_u|\Delta u \Delta v. \end{aligned}$$

従って, 重積分の定義に戻って $\Delta u, \Delta v \to 0$ としてやれば, ($\delta x\delta y \to dxdy$, $\Delta u\Delta v \to dudv$ より) 公式をえる.

(**問**　上の例 4 で, Jacobian が各々 $ad-bc, r$ で与えられることを確かめよ.)

4. 次の重積分の値を求めよ（但し $a,b,c>0$）.
(1) $\displaystyle\iint_{x,y\ge 0}(ax+by+c)^{-\alpha}$ $(\alpha>2)$　(2) $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\le 1}\log(x^2+y^2)dxdy$

例 5 (**極座標（球座標）変換**) $x=r\sin\theta\cos\phi, y=r\sin\theta\sin\phi, z=r\cos\theta \to dxdydz = r^2|\sin\theta|drd\theta d\phi$
$\displaystyle\iiint_V x^2dxdydz=\frac{4\pi}{15}a^5$ $(V: x^2+y^2+z^2\le a^2)$ を確かめよ.
(**解**) $0\le 0\le a, 0\le\theta\le\pi, 0\le\phi\le 2\pi$ に写ることと, 対称性から,

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \iiint_V z^2dxdydz=\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^\pi r^2\cos^2\theta\ r^2|\sin\theta|dr \\ &= 2\pi\int_0^\pi\cos^2\theta\sin\theta d\theta\int_0^a r^4dr = 2\pi\left[-\frac{1}{3}\cos^3\right]_0^\pi\frac{a^5}{5}=\frac{4\pi}{15}a^5 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

5. 次の三重積分を求めよ（但し $a>0, \alpha>-3/2$）.
(1) $\displaystyle\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^{x+y}e^{x+y-z}dz$　(2) $\displaystyle\iiint_V(x^2+y^2+z^2)^\alpha dxdydz$ $(V: x^2+y^2+z^2\le a^2)$

---

4. $1/\{ab(\alpha-1)(\alpha-2)c^{\alpha-2}\}, -\pi$　**5.** $e(e-2)/2, 4\pi a^{2\alpha+3}/(2\alpha+3)$

2.3 重積分の計算 3

空間図形の体積や表面積を求めてみよう.

例 6　楕円体 $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2\le 1$ の体積を求めよ.　[$4\pi abc/3$]

(**解**)　変数変換により, $|V|=abc\displaystyle\iiint_{x^2+y^2+z^2\le 1}dxdydz$. 半径 1 の球の体積は $4\pi/3$.　$\blacksquare$

[**体積 1**]　$V(\subset \mathbf{R}^3)$ の体積 $\Rightarrow |V|=\displaystyle\iiint_V dxdydz$.

また V が 2 平面 $x=a, x=b$ $(a<b)$ の間にあるとき $\Rightarrow |V|=\displaystyle\int_a^b|V_x|dx$
(但し, $V_x=$[V を x 軸に垂直な平面で切ったときの切り口の図形])

(上の別解)

$V_x: \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1-\dfrac{x^2}{a^2}$ $(|x|\le a)$, $|V_z|=\pi\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)bc$ より $|V|=\pi bc\displaystyle\int_{-a}^a\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx.$

例 7 球 $x^2+y^2+z^2 \le a^2$ と円柱 $(x-a/2)^2+y^2 \le (a/2)^2$ の共通部分の体積 V を求めよ. $[4/3(\pi/2-2/3)a^3]$

(解) $y \ge 0, z \ge 0$ の部分を考えて, $D=\{(x,y):(x-a/2)^2+y^2 \le (a/2)^2, y \ge 0\}$ とすると, $V = 4\iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\, dxdy$. 後は極座標変換で, $0 \le \theta \le \pi/2, 0 \le r \le a\cos\theta$ となるので,

$$\begin{aligned} V &= 4\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{a\cos\theta} \sqrt{a^2-r^2}\, rdr = 4\int_0^{\pi/2} d\theta \left[-\frac{1}{3}(a^2-r^2)^{3/2}\right]_0^{a\cos\theta} \\ &= \frac{4}{3}\int_0^{\pi/2} a^3(1-\sin^3\theta)d\theta = \frac{4}{3}a^3\left\{\frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2}(1-\cos^2\theta)\sin\theta d\theta\right\} = \frac{4}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)a^3. \end{aligned}$$

[体積 2]
xy-平面の閉領域 D 上の連続関数 $\phi(x,y) \le \psi(x,y)$ に対し，二つの曲面 $z=\phi(x,y), z=\psi(x,y)$ ではさまれた立体 $V=\{(x,y,z):(x,y)\in D, \phi(x,y) \le z \le \psi(x,y)\}$ の体積

$$|V| = \iint_D [\psi(x,y)-\phi(x,y)]\, dxdy$$

1. 次の立体の体積を求めよ.
   (1) 円柱面 $x^2+y^2=a^2$, 平面 $z=0$, 曲面 $z=x^2+y^2$ で囲まれた部分.
   (2) 二つの円柱 $x^2+y^2 \le a^2, y^2+z^2 \le a^2$ の共通部分.
2. xy-平面上の $y \ge 0$ の部分にある領域 D を x 軸回転してできる立体の体積 $V = 2\pi \iint_D y\, dxdy$.

例 8 球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ の円柱 $(x-a/2)^2+y^2 \le (a/2)^2$ の内部にある部分の曲面積 A を求めよ.

$[2(\pi-2)a^2]$

[曲面積] xy-平面上の領域 D で定義された C^1 級曲面 $S: z=f(x,y)$ の面積 $A = \iint_D \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\, dxdy$.

(解) 例 7 と同じ D で $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ から $\sqrt{1+z_x^2+z_y^2} = a/\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ となり $A = 4\iint_D a/\sqrt{a^2-x^2-y^2}\, dxdy$. これを極座標変換で計算して

$$\begin{aligned} V &= 4a\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{a\cos\theta} \frac{1}{\sqrt{a^2-r^2}}\, rdr = 4a\int_0^{\pi/2} d\theta \left[-\sqrt{a^2-r^2}\right]_0^{a\cos\theta} \\ &= 4a^2\int_0^{\pi/2}(1-\sin\theta)d\theta = 4a^2(\pi/2-1) = 2(\pi-2)a^2 \end{aligned}$$ ■

(曲面積の公式の説明) 微小増分 $\Delta x, \Delta y > 0$ に対して, xy 平面の 4 点 $(x,y), (x+\Delta x, y), (x, y+\Delta y), (x+\Delta x, y+\Delta y)$ を頂点とする正方形が, f により, 空間の曲面の一部 ΔS に写るが, その面積 ΔA は $\Delta x, \Delta y$ が微小なら, $B(x,y,f(x,y))$, $P(x+\Delta x, y, f(x+\Delta x, y))$, $Q(x, y+\Delta y, f(x, y+\Delta y))$ に対し, ベクトル $\vec{p} = \vec{BP}$, $\vec{q} = \vec{BQ}$ で作られる平行四辺形に非常に近く, さらに平均値の定理より $\vec{p} \approx (\Delta x, 0, f_x(x,y)\Delta x)$, $\vec{q} \approx (0, \Delta y, f_y(x,y)\Delta y)$ となることから

$$\Delta A \approx \sqrt{|\vec{p}|^2|\vec{q}|^2 - (\vec{p}\cdot\vec{q})^2} \approx \sqrt{(1+f_x^2)(1+f_y^2) - f_x^2 f_y^2}\, \Delta x \Delta y = \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\, \Delta x \Delta y.$$

これにより, 公式を得る. ■

3. 次の曲面積を求めよ.
   (1) 円柱面 $x^2+y^2=a^2$ の円柱 $x^2+z^2\le a^2$ の内部にある部分.
   (2) 曲面 $z=\tan^{-1}(y/x)$ $(x,y>0)$ の円柱 $x^2+y^2\le a^2$ の内部にある部分.

4. xz-平面上の C^1 級曲線 $z=f(x)$ $(0\le a\le x\le b)$ を z 軸の周りに 1 回転してできる曲面の面積 $A=2\pi\displaystyle\int_a^b x\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$.

5. xy-平面上の C^1 級曲線 $y=f(x)$ $(a\le x\le b)$ を x 軸の周りに 1 回転してできる曲面の面積 $A=2\pi\displaystyle\int_a^b |y|\sqrt{1+y'^2}\,dx$.

---

1. $\pi a^4/2, 16a^3/3$ **2.** 最初の公式で円柱座標 $x=x, y=r\cos\theta, z=r\sin\theta$ に変換,
$V=\{(x,r\cos\theta,r\sin\theta):(x,r)\in D, 0\le\theta\le 2\pi\}$
3. $8a^2, \pi(a\sqrt{a^2+1}+\log(a+\sqrt{a^2+1}))/4$
$(\to\int\sqrt{x^2+A}dx=(x\sqrt{x^2+A}+A\log|x+\sqrt{x^2+A}|)/2$ を用いて良い)
5. 曲面の方程式は $z^2=f(x)^2-y^2, a\le x\le b, |y|\le|f(x)|$

(積分の式)

1. (1) $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\le a^2}(x^2+y^2)\,dxdy$.
   (2) $\displaystyle 2\iint_{x^2+y^2\le a^2}\sqrt{a^2-y^2}\,dxdy=2\int_{-a}^{a}dy\int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}}\sqrt{a^2-y^2}\,dx$.

2. $V=\{(x,r\cos\theta,r\sin\theta):(x,r)\in D, 0\le\theta\le 2\pi\}$, 変換 $x=x, y=r\cos\theta, z=r\sin\theta$ により, $dxdydz=dxrdrd\theta$. 従って $V=\displaystyle\iiint_V dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\iint_{(x,r)\in D}dx\ rdr$.

3. (1) $y^2+z^2=a^2$ の $x^2+y^2\le a^2$ にある部分で考えても同じで, $z=\sqrt{a^2-y^2}$ として, $\displaystyle 2\iint_{x^2+y^2\le a^2}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$. 後は 1 の (2) と計算の仕方は同じ.
   (2) $z=\tan^{-1}(y/x)$ $(x,y>0)$ から $z_x=-y/(x^2+y^2), z_y=x/(x^2+y^2)$ で, $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\le a^2}\sqrt{1+1/(x^2+y^2)}\,dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\sqrt{1+1/r^2}\,rdr=2\pi\int_0^a\sqrt{r^2+1}\,dr$.

4. $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$ より, $1+z_x^2+z_y^2=1+f'(\sqrt{x^2+y^2})^2$ で, 後は曲座標変換.

5. 上半分が $z=\sqrt{f(x)^2-y^2}$ から, $1+z_x^2+z_y^2=f^2(1+f'^2)/(f^2-y^2)$ で, $D=\{a\le x\le b, |y|\le|f(x)|\}$ より, $\displaystyle 2\int_a^b dx\int_{-|f|}^{|f|}\sqrt{\frac{f^2(1+f'^2)}{f^2-y^2}}\,dy$ で, $\int 1/\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\sin^{-1}(x/a)$ $(a>0)$ を用いる.

2.4 ベクトル解析 1

複素積分や物理学への応用などで必要になる線積分 (line integral) について解説する. 特に, 初めに述べるグリーンの定理は重要な定理である.

[線積分 1] $C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t))$ $(a \le t \le b)$ を平面上の滑らかな $(= C^1$ 級) 曲線とする.
連続関数 $f : C \to \mathbf{R}$ の C に沿う（x に関する）**線積分 (line integral)**:

$$\int_C f dx = \int_a^b f(\boldsymbol{r}(t)) x'(t) dt.$$

y に関する線積分 $\int_C f dy$ も同様に定義される.

またCが**区分的に滑らかな曲線** $(=$ 有限個の滑らかな曲線 $C_1, \ldots, C_n$ をつないだ曲線) のとき, $\int_C f dx = \int_{C_1} f dx + \cdots + \int_{C_n} f dx$ と定義する.

曲線で始点と終点が同じとき, **閉曲線**といい, 重複点をもたないとき, **単純曲線** or **Jordan 曲線**という. さらに閉曲線で, 始点・終点以外に重複点をもたないとき**単純閉曲線**という.

(注) 曲線が $C : \boldsymbol{r} = (x, \varphi(x)); a \le x \le b$ と表されるときは $(x = t$ より $x' = 1$, $dx = dt$ で)

$$\int_C f dx = \int_a^b f(x, \varphi(x)) dx.$$

定理 1 [Green の定理] D: xy-平面上で有限個の区分的に滑らかな単純閉曲線で囲まれた閉領域,
$P(x, y), Q(x, y)$: C^1 関数 on an open set $U \supset D$ なら

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int_{\partial D} (P dx + Q dy).$$

但し, ∂D の向きは D の内部を左手に見て進む向きにとる.

また, 上の式は次と同値であることを注意しておく.

$$\int_{\partial D} P dx = -\iint_D P_y dxdy, \int_{\partial D} Q dy = \iint_D Q_x dxdy.$$

(証明) まず P についてのみ考える. 領域 D が単純な場合: $D = \{(x, y); \varphi(x) \le y \le \psi(x), a \le x \le b\}$ のとき.

$$\iint_D P_y dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} P_y(x, y) dy = \int_a^b \{P(x, \psi(x)) - P(x, \varphi(x))\} dx$$

また y 軸に平行な線分上 $(x = a, x = b)$ では $x' = 0$ より, x に関する線積分は 0 となることと $y = \psi(x)$ の曲線では逆向きに積分すること, さらに定理の前の (注) より

$$\int_{\partial D} P dx = \int_a^b P(x, \varphi(x)) dx - \int_a^b P(x, \psi(x)) dx$$

これから $\int_{\partial D} P dx = -\iint_D P_y dxdy$ をえる. さらに D が一般 (有限個の区分的に滑らかな単純閉曲線で囲まれた閉領域) のとき D を縦に (y 軸に平行な線分で) 有限個に分割することにより, 分割の一つ一つは初めの単純な場合と同じになる. またそれらの境界線上での線積分を全て足し合わせると, 切り口の線分上ではそれぞれ向きが逆になるので互いに打ち消し, 結局は ∂D での線積分のみが残ることになる. このことから P について, 上と同じ結果を得る.

また Q については, 横に分割することにより, 初めの D が単純な場合で, P を Q として, x, y を入れ換えて, ∂D の向きを逆にしたものと同じになることから, マイナスが消えて, $\int_{\partial D} Q dy = \iint_D Q_x dxdy$ をえる. ■

1. xy-平面上の単純閉曲線 C で囲まれた領域 D の面積を S とすると次が成り立つことを示せ.
   (1) $S = \int_C xdy = -\int_C ydx = \frac{1}{2}\int_C (xdy - ydx)$
   (2) $C : x = x(t), y = y(t)$ $(a \le t \le b)$ と表されるとき

$$S = \int_a^b xy' dt = -\int_a^b yx' dt = \frac{1}{2}\int_a^b \det\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix} dt.$$

   但し, C の向きは D の内部を左手に見て進む向きとする.

[線積分 2] C^1 級曲線 $C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ $(a \le t \le b)$ の弧長 $s(t) = \int_a^t |\boldsymbol{r}'(u)|du$
連続関数 $f : C \to \mathbf{R}$ の C に沿う（弧長に関する）**線積分**:

$$\int_C f ds = \int_a^b f(\boldsymbol{r}(t))|\boldsymbol{r}'(t)|dt.$$

ここで初めの弧長 $s(t)$ については, $[a,t]$ を有限個 $a = u_0 < u_1 < \cdots < u_n = t$ に分割し, そのときの曲線の分点を線分で繋いだ折れ線で近似して, その長さを考え, 分点を細かくして極限を取れば得られる. 即ち,

$$\sum_{i=1}^n |\boldsymbol{r}(u_i) - \boldsymbol{r}(u_{i-1})| = \sum_{i=1}^n \frac{|\boldsymbol{r}(u_i) - \boldsymbol{r}(u_{i-1})|}{u_i - u_{i-1}} \to \int_a^t |\boldsymbol{r}'(u)|du.$$

空間あるいは平面内のある領域で定義された実数値関数 $f = f(x,y)$ or $f(x,y,z)$ を**スカラー場 (scalar field)**, ベクトル値関数 $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2)$ or (F_1, F_2, F_3) を**ベクトル場 (vector field)** という.

2. 平面上のベクトル場 $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2)$ に対して, $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \partial F_1/\partial x + \partial F_2/\partial y$ ($\boldsymbol{F}$ の**発散**) とする.
   D: xy-平面上の単純閉曲線 C で囲まれた領域とすると,

$$\iint_D \operatorname{div} \boldsymbol{F} dxdy = \int_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\, ds.$$

   但し C の向きは D の内部を左手に見て進む向き, $\boldsymbol{n}$ は C の外向きの単位法線ベクトル, s は弧長.

---

2. $C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t))$ とすると $\boldsymbol{n}(t) = \frac{(y'(t), -x'(t))}{|(y'(t), -x'(t))|}$, また $ds = |\boldsymbol{r}'(t)|dt$.

2.5 ベクトル解析 2

[線積分 3] ベクトル場 $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3) : C \to \mathbf{R}^3$ の C に沿う**線積分**:

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \boldsymbol{r}'(t) dt \ \left(= \int_C F_1 dx + \int_C F_2 dy + \int_C F_3 dz \right) \quad (\cdot \text{ は内積を表す})$$

1. ベクトル場 $\boldsymbol{f}(x,y,z) = (y,x,z)$ のら線 $C : \boldsymbol{r}(\theta) = (a\cos\theta, a\sin\theta, h\theta), 0 \le \theta \le 2\pi$ $(a, h > 0)$ に沿う線積分を求めよ.

[外積] $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$: xyz-座標系の基本ベクトル（右手系）とする.

(**注**: $\boldsymbol{i}$ から $\boldsymbol{j}$ へネジを回すと $\boldsymbol{k}$ の向きにネジが進むとき $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ は**右手系**であるという).

ベクトル $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k} = (a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ の**外積（ベクトル積）**$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の大きさは $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のつくる平行四辺形の面積に等しく, 向きはその平行四辺形に垂直で, $\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ にネジを回すときの進む向きに等しい.

この定義より次が成り立つ. (確かめよ)

(1) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} // \boldsymbol{b}$, 特に $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = 0$ (2) $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ (3) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$

(4) $(\alpha\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times (\alpha\boldsymbol{b}) = \alpha(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$ $(\alpha \in \boldsymbol{R})$

(5) さらに $\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}$ より

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_2b_3 - b_2a_3)\ \boldsymbol{i} + (a_3b_1 - b_3a_1)\ \boldsymbol{j} + (a_1b_2 - b_1a_2)\ \boldsymbol{k} = \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}.$$

[面積分] 曲面 $S : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$; $\boldsymbol{r}(u,v)$ は uv-平面の領域 D 上の C^1 関数で $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \neq \boldsymbol{0}$ を満たすとする (このとき S を**正則曲面**という).

ベクトル $(\partial\boldsymbol{r}/\partial u \times \partial\boldsymbol{r}/\partial v)(u,v)$ は, 点 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v)$ における S の法線ベクトルで, S の面積は

$$|S| = \iint_D \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right| dudv.$$

更に単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n} = \dfrac{\partial\boldsymbol{r}/\partial u \times \partial\boldsymbol{r}/\partial v}{|\partial\boldsymbol{r}/\partial u \times \partial\boldsymbol{r}/\partial v|}$ として,

(1) 連続関数 $f : S \to \mathbf{R}$ の S 上の**面積分**:

$$\iint_S f dS = \iint_D f(\boldsymbol{r}(u,v)) \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right| dudv.$$

(2) ベクトル場 $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3) : S \to \mathbf{R}^3$ の S 上の, 単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ で定められた側の, **面積分**:

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} dS = \iint_D \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right) dudv.$$

2. $S : z = z(x,y), (x,y) \in D$ と表されるとき, 次を示せ.

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} dS = \iint_D \left(-F_1 \frac{\partial z}{\partial x} - F_2 \frac{\partial z}{\partial y} + F_3 \right) dxdy$$

3. S: 原点中心、半径 a の球面とする. S の外側の面積分に関して

$$\iint_S \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \cdot \boldsymbol{n} dS = 4\pi$$

を示せ. 但し $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ に対し、$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とする.

---

1. $2\pi^2 h^2$, **2.** $S : \boldsymbol{r} = (x, y, z(x, y))$, **3.** 球面 S 上 $r = a$, $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}/r$.

2.6 ベクトル解析 3 [積分定理]

定理 2 [Gauss の発散定理] V ($\subset \mathbf{R}^3$): 閉曲面 S で囲まれた有界な閉領域,
$\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$: C^1 級ベクトル場 defined on an open set $U \supset V$.

$$\iiint_V \mathrm{div}\, \boldsymbol{F} dV = \iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} dS \quad (dV = dxdydz).$$

ここで $\mathrm{div}\, \boldsymbol{F} \equiv \nabla \cdot \boldsymbol{F} = \partial_x F_1 + \partial_y F_2 + \partial_z F_3$ ($\boldsymbol{F}$ の**発散**),
$\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, n_3)$ は S の外向きの単位法線ベクトル. 成分で表すと

$$\iiint_V \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) dV = \iint_S (F_1 n_1 + F_2 n_2 + F_3 n_3) dS.$$

[注] V を有限個の閉曲面 S_i で囲まれた部分からなる領域としても成り立つ ($S = \bigcup_i S_i$).
(物理的意味) ある流体があり, $\boldsymbol{F}$ はその速度分布を表すとすると,
(単位時間内に V の中で生ずる流体の量) = **(単位時間内に V の外に流れ出る流体の量)**

1. 閉曲面 S で囲まれた領域の体積 V は

$$V = \frac{1}{3} \iint_S \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n} dS.$$

$\boldsymbol{n}$ は S の外向き単位法線ベクトル, $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ とする.

2. xyz-空間内の原点を通らない閉曲面 S に対して,

$$\iint_S \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \cdot \boldsymbol{n} dS = \begin{cases} 0 & (\text{原点が } S \text{ の外部}) \\ 4\pi & (\text{原点が } S \text{ の内部}). \end{cases}$$

但し $\boldsymbol{r} = (x, y, z), r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

3. ラプラシアン $\triangle = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ に対する **Green の公式**
V: 閉曲面 S で囲まれた閉領域, ϕ, ψ: C^2 級関数 defined on a domain $U \supset V$ とする.
(1) $\displaystyle\iiint_V \triangle\phi dV = \iint_S \frac{\partial \phi}{\partial n} dS$
(2) $\displaystyle\iint_S \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS = \iiint_V \{\phi \triangle \psi + (\nabla\phi) \cdot (\nabla\psi)\} dV$
(3) $\displaystyle\iint_S \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS = \iiint_V (\phi \triangle \psi - \psi \triangle \phi) dV.$
但し, $\partial/\partial n$ は S 上での外向き法線方向の偏微分を表す. 即ち, $\partial\phi/\partial n = \nabla\phi \cdot \boldsymbol{n}$ ($\boldsymbol{n}$ は外向き法線ベクトル)

定理 3 [Stokes の定理] S: xyz-空間内の有限個の閉曲線を境界とする表裏のある曲面, $\boldsymbol{F}$: C^1 級ベクトル場 on a domain $U \supset S$.

$$\iint_S (\mathrm{rot}\ \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n} dS = \int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

ここで rot $\boldsymbol{F} := \nabla \times \boldsymbol{F}$ ($\boldsymbol{F}$ の**回転**), C は S の境界で向きは S の内部を左手に見て進む向きにとる. $\boldsymbol{n}$ は S の裏から表に向かう向きの単位法線ベクトル. 成分で表せば,

$$\iint_S \left\{ \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) n_x + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) n_y + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) n_z \right\} dS$$
$$= \int_C (F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz).$$

(物理的意味) 上と同様に, $\boldsymbol{F}$ はある流体の速度分布を表すとすると,

(単位時間内に S の表面で発生する渦の量) = (単位時間内に S の境界を回っている流体の量)

---

2. 原点以外で div $(\boldsymbol{r}/r^3) = 0$, 原点が内部にあるときは S の内部に含まれる原点中心の球 K をとり、S と K で囲まれた領域 (S の内, K の外) で定理 2 を適用, S を K にして良い (法線 $\boldsymbol{n}$ の向きに注意), 問 2-2.

3. div を用いて表すと？ $\to \triangle = \mathrm{div}\ \nabla, \cdots$.

2.7 補充問題

1. $f(t)$ を C^1 級関数とするとき, 次の式が成り立つことを示せ.
(1) $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\le 1} f'(x^2+y^2)dxdy = \pi(f(1)-f(0))$
(2) $\displaystyle\iint_{0\le x,y\le 1} f'(|x-y|)dxdy = 2\left\{\int_0^1 f(t)dt - f(0)\right\}$

2. $f(t) = t\displaystyle\int_0^{t^2} \cos(1-x)^2 dx$ のとき $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ の値を求めよ.

3. $a \le x \le b, \alpha \le t \le \beta$ において $f(x,t), f_x(x,t)$ が連続ならば

$$\frac{d}{dx}\int_\alpha^\beta f(x,t)dt = \int_\alpha^\beta \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$$

が成り立つが, これを重積分を用いて証明せよ.

4. $0 < a \le b$ に対し, $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^b - t^a}{\log t}dt$ を求めよ. **[ヒント]** $\partial_x(t^x) = (\log t)\ t^x$

一般に非負の連続関数 $f(x,y)$ に対してはいつでも積分順序の交換が可能で, しかも重積分と一致することが知られている. (測度論あるいはルベーグ積分論で, フビニの定理として学ぶ.) それを認めて以下の問いに答えよ. (勿論, 広義積分の一様収束という条件を加えれば, これまでの知識で, 示すことも出来る.)

5. $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ を重積分を用いて確かめよ. **[ヒント]** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = ?$

6. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx = \log\frac{b}{a}$ $(a, b > 0)$ を示せ.

いつでも積分順序の交換ができるわけではない. その例として次を挙げておく.

7. $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ とする. 次を確かめよ.

$$\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx = -\frac{\pi}{4}, \quad \int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy = \frac{\pi}{4}$$

---

2. $(\sin 1)/4$ **3.** 重積分と累次積分, 積分の順序変更の定理と微積分学の基本定理を用いる.
[定理] 閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数 $\alpha(x) \le \beta(x)$ に対して, $D = \{(x,y) : a \le x \le b, \alpha(x) \le y \le \beta(x)\}$ で $f(x,y)$ が連続なら,

$$F(x) = \int_{\beta(x)}^{\alpha(x)} f(x,y)dy \quad \text{は } [a,b] \text{ 上の連続関数で} \quad \iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy.$$

更に閉区間 $[c,d]$ 上の連続関数 $\gamma(y) \le \delta(y)$ に対して, $D = \{(x,y) : c \le y \le d, \gamma(y) \le x \le \delta(y)\}$ と表されるなら

$$\int_a^b dx\int_{\beta(x)}^{\alpha(x)} f(x,y)dy = \int_c^d dy\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)dx$$

が成り立つ.