初めに

まず, **小学生でも分かる話**から

・ 1 と $0.9999\cdots$ はどちらが大きい？ $\rightarrow 1/3 = 0.333\cdots$ を 3 倍すれば…？

・$1/2 + 1/4 + 1/8 + \cdots = ?$ $\rightarrow [0, 1]$ 区間の線分の絵を描き, 長さを並べていけば…？

・半径 $r > 0$ の円の面積の公式 πr^2 を導け.

$\rightarrow$ 円を 4 等分, 8 等分, 16 等分, …として, 扇形を交互に並べれば,…？

中学生レベルなら

・三平方の定理を証明せよ. 即ち, $a, b, c > 0$ の長さを持つ直角三角形で、斜辺の長さが c のとき $a^2 + b^2 = c^2$ を示せ.

$\rightarrow$ 同じ 4 つの直角三角形で, 斜辺を 1 辺とする正方形を囲んでできる大きい正方形の面積は?

高校生レベルでは

・楕円 $(x/a)^2 + (y/b)^2 \le 1$ の面積は？ $(a, b > 0)$

$\rightarrow y = b\sqrt{1-(x/a)^2}$ を $-a \le x \le a$ で積分して 2 倍だが…？

・等比級数 $a + ar + ar^2 + \cdots =$ の公式を導け. $(r > 0)$

$\rightarrow = S$ とおいて, a 倍して引くが…？その前に, a, r で場合分け.

上の問は何れも学校で習うものだが, 難しい理論を用いたりしなくても, 考え方一つで簡単に解けたりする. また, 解き方も一つとは限らない。

筆者は, 小学 5 年生の時に, 上に述べた円の面積の求め方を, 先生が絵を使って説明してくれたのを今でも覚えている. しかし, これも高校生になると, 積分を用いて求められることを知る.

大事なのは, 色々な考え方ができるということで, 数学とはそれを身に着けるための学問だと言っても良いかも知れない.

上の小五で習った, 円の面積の求め方は, 筆者にとって, 初めての数学的感動だったかもしれない. それ以来, 公式は作るものだと認識し, その作り方を理解し, いつでも作れるようにと覚えて行った. 今では, 数学そのものが, 自分の中で作り上げていく学問だと思っている.

また, **解析学**では, **「極限」**という概念と, **「不等式評価」**が, 非常に重要な要素となる. **微分積分学**では, そのための基本を学ぶことになる.

【答え】

・$1 = 0.999\cdots$

・$1/2 + 1/4 + 1/8 + \cdots = 1$ 長さ 1 の線分の絵を描き, その半分に, 残り半分の半分を, 更に残りの半分を…と順に加えて行くので, 明らかに 1 に近づく.

・縦が半径 r, 横が円周の半分 πr の長方形に近づくので, πr^2 (円周=直径 $\times\pi$ に注意.)

・大きい正方形は, 1 辺が $a + b$, 一方, 4 つの直角三角形と 1 辺が c の正方形の和でもあるので, $(a + b)^2 = 2ab + c^2$

・$x/a = \tilde{x}$ と変数変換すれば, $dx = ad\tilde{x}$ で, 丁度, 半径 1 の円の面積の積分計算の ab 倍.

（ちなみに, 多変数の積分を学べば, 楕円上での重積分で与えられることを知るので, 2 変数の変数変換 $x/a = \tilde{x}, y/b = \tilde{y}$ より, $dxdy = abd\tilde{x}d\tilde{y}$ で, 単位円での重積分となるので明らか, と分るようになる.)

・まず, $a = 0$ なら 0. $a \ne 0$ とすると, 公比 $r \ge 1$ のとき, $a \cdot \infty$ なので, $a > 0$ なら ∞, $a < 0$ なら $-\infty$. $0 < r < 1$ のとき, $(1 - r)S = a$ を得るので, $S = \sum_{n\ge1} r^{n-1} = a/(1 - r) =$ 初項$/(1 -$ 公比$)$.

ちなみに最初の 2 つの問いも, 実は等比級数で, それぞれ, $(9/10)(1 - 1/10) = 1$, $(1/2)(1 - 1/2) = 1$ と計算できる. 但し, 無限に足し続けることは現実には不可能で, 無限和とは, 部分和の極限として定義される. 即ち, $\displaystyle\sum_{n\ge1} := \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}$ (勿論, この極限が収束するという条件の下で.)

最後に, 円周率 $\pi = 3.14\cdots$ は「円周/直径」$= \ell/(2r)$ で定義されるが (r は半径: radius), これは一体どうやって計算するのだろうか？円周と直径を実際に測って, 割るとしても, 計測での誤差が出てしまう !! $\rightarrow$ その一つの答えが, **「無限級数表現」**である. (それは、**「微分積分学 I」** の最後に.)

微分積分学 I (Differential & Integral Calculus I)

平場　誠示 (Seiji HIRABA)

2019 年 6 月 28 日

目 次

1 極限と連続性 (Limits and Continuity)

1.1 実数 (Real numbers)

[論理記号] 「$\forall$」=「All, Any, Arbitrary」=「任意の」, 「$\exists$」=「Exist」=「存在して」, セミコロン「; 」=「s.t.」=such that」=「以下をみたすような」

[集合 (Sets)] あるものの集まりを**集合**という. X を集合 (**全体集合**) として, ある条件 $P(x)$ (**命題関数**ともいう) に対し, $A = \{x \in X : x$ は条件 $P(x)$ をみたす $\}$ と表して集合 A を定義する.

・$x \in A$: x は集合 A の**元 (element)**, その否定は $x \notin A$.

・$\emptyset$: **空集合 (empty set)**; 元が何もない集合.

・$A \subset B$: A は B の**部分集合 (subset)** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $[x \in A \Rightarrow x \in B]$ $\iff$ ${}^\forall x \in A, x \in B$.
　空集合 $\emptyset$ は任意の集合の部分集合とみなす; ${}^\forall A$: 集合, $\emptyset \subset A$.

・$A = B$ $\overset{\text{def}}{\iff}$ $A \subset B, A \supset B$ $\iff$ $[x \in A \iff x \in B]$.

・$A \cup B$: A と B の**和集合 (union)**; $x \in A \cup B$ $\overset{\text{def}}{\iff}$ $x \in A$ または $x \in B$.

・$A \cap B$: A と B の**共通部分 (intersection)**; $x \in A \cap B$ $\overset{\text{def}}{\iff}$ $x \in A$ かつ $x \in B$.

・$A \setminus B$: **差集合 (difference)**; $x \in A \setminus B$ $\overset{\text{def}}{\iff}$ $x \in A, x \notin B$.

・$\bigcup A_n$: 無限和; $x \in \bigcup A_n$ $\overset{\text{def}}{\iff}$ ${}^\exists n;\quad x \in A_n$.

・$\bigcap A_n$: 無限の共通部分; $x \in \bigcap A_n$ $\overset{\text{def}}{\iff}$ ${}^\forall n,\quad x \in A_n$.

・$A^c := X \setminus A$: A の**補集合 (complement)**; $x \in A^c$ $\overset{\text{def}}{\iff}$ $x \notin A$.

実数において区間は $[a,b]; a \le x \le b$, $(a,b); a < x < b$, $[a,b); a \le x < b$, $(a,b]; a < x \le b$ と表す.

今まで, 数というものをごく当り前のように使ってきたと思うが, では

問 1.1 　自然数, 整数, 有理数, 無理数, 実数の定義を述べよ.
(Natural numbers, Integers, Rational numbers, Irrational numbers, Real numbers)

・**[自然数 N]** 　ものを数えるのに使う自然な数; $1, 2, 3, \ldots$; $1 \in \mathbf{N}, n \in \mathbf{N}$ なら $n+1 \in \mathbf{N}$.

・**[整数 Z]** 　引算ができるように自然数を拡張した数; $0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$

・**[有理数 Q]** 　割算ができるように整数を拡張した数; $m/n\ n \neq 0$, m, n は整数;
　有限小数, または循環する無限小数で表示できる数.

・**[無理数]** 　有理数ではないがとにかく存在する数; $\pi, \sqrt{2}, \ldots$ など;
　循環しない無限小数で表示できる数.

・**[実数 R]** 　有理数または無理数. これにより無理数を $\mathbf{Q}^c = \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ と表すことができる.

問 1.2 　実数の三大基本性質を述べよ.

1. **四則演算** 　和差積商が定義され, 和, 積に関して (1) **交換律** (2) **結合律** (3) **分配律**が成り立つ. 即ち, $a, b \in \mathbf{R}$ に対して $a+b, a-b, ab, a/b (b \neq 0) \in \mathbf{R}$ で, さらに $c \in \mathbf{R}$ として,
　(1) $a+b = b+a, ab = ba$ 　(2) $(a+b)+c = a+(b+c), (ab)c = a(bc)$ 　(3) $a(b+c) = ab+ac$.

2. **大小関係** 　2 つの異なる実数に, 大小のいずれかの関係が必ず一つだけ成り立ち, (1) **推移律**をみたし, (2) **和不変性** (3) **正積不変性**をもつ.
　(1) $a < b, b < c \Rightarrow a < c$ 　(2) $a < b, c \in \mathbf{R} \Rightarrow a+c < b+c$ 　(3) $a < b, c > 0 \Rightarrow ac < bc$.

3. **実数の連続性 (Weierstrass)** 　上に有界な集合 S は上限 $\sup S$ をもつ, i.e.,

$$ {}^\exists c \in \mathbf{R}; {}^\forall x \in S, x \le c \Longrightarrow {}^\exists \sup S < \infty. $$

今後, 実数は上の 3 つの性質を満たすものとして扱う. 特に, 3 の実数の連続性を公理として認める. ここで, **上に有界, 下に有界, 有界, 最大・最小値, 上限, 下限** について: $S \subset \mathbf{R}$ とする.

・S が**上に有界** $\overset{\text{def}}{\iff}$ ${}^{\exists}c; x \leq c\ ({}^{\forall}x \in S)$.

このとき c は S の (一つの) **上界**であるという.

・S が**有界** $\overset{\text{def}}{\iff}$ S が上にも下にも有界.

・S の**最大値**: $a = \max S \overset{\text{def}}{\iff} a \in S, x \leq a\ ({}^{\forall}x \in S)$.

・S の**上限**: $a = \sup S \overset{\text{def}}{\iff}$ S の最小上界: $a = \min\{c; c$ は S の上界 $\}$.

S のどんな元よりも大きいかまたは等しい値のうちで最小のもの ($a \in S$ とは限らないことに注意).

下に有界, 下界, 最小値, 下限＝最大下界も定義は同様.

実際に上限・下限を扱うときには次を用いる. (同値なので, これを定義と思う方が良い.)

定理 1 $a = \sup S \iff (1)\ {}^{\forall}x \in S, x \leq a,\ (2)\ {}^{\forall}\varepsilon > 0, {}^{\exists}x = x(\varepsilon); a - \varepsilon < x\ (\leq a)$.

問 1.3 上を説明（証明）せよ.

問 1.4 自然数は有界か？

定理 2 (Archimedes の原理 (公理, 原則)) [自然数の非有界性] 自然数全体は上に非有界.

$n \leq c\ ({}^{\forall}n \in \mathbf{N})$ となる一定の数 c は存在しない. i.e., ${}^{\forall}c \gg 1, {}^{\exists}N \in \mathbf{N}; c < N$.

[証] もし上に有界だとすると上限 $a = \sup \mathbf{N} < \infty$ がある. 上限の性質より ${}^{\exists}N \in \mathbf{N}; a - 1 < N \leq a$, i.e, $a < N + 1$. ところが自然数の定義より $N + 1$ も自然数であるから a が上限であることに矛盾する. ■

系 1 ${}^{\forall}a, b > 0, {}^{\exists}N \in \mathbf{N}; b < Na$

[証] もしある $a, b > 0$ に対して, どんな自然数 n をもってきても $b \geq na$ となるとすると $a > 0$ より $n \leq b/a$. これは自然数が非有界であることに矛盾する. ■

問 1.5 有理数はどこにどのぐらいあるのか？

定理 3 (有理数の稠密性) 任意の異なる 2 数の間にも必ず有理数は存在する:

$$ {}^{\forall}a, b; a < b, {}^{\exists}r \in \mathbf{Q}; a < r < b. $$

[証] 1 と $b - a (> 0)$ に対して上の系より, ${}^{\exists}N \in \mathbf{N}; 1 < N(b - a)$, i.e., $Na < Na + 1 < Nb$. また明らかに ${}^{\exists}M \in \mathbf{Z}; Na < M \leq Na + 1$ (自然数の非有界性から $Na < M$ なる整数 M は存在するからその中の最小のものをとればよい). よって $r = M/N$ とおけば有理数で $a < r < b$ となる. ■

問 1.6 a, b をある数とする.

(1) ${}^{\forall}\varepsilon > 0, a < \varepsilon$ なら $a \leq 0$ を示せ. これより ${}^{\forall}\varepsilon > 0, a < b + \varepsilon$ なら $a \leq b$.

(2) ${}^{\forall}c < a$ に対し, $b \geq c$ なら $a \leq b$ は正しいか？ (正しい)

1.2 数列 (Sequences)

数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ が番号 n を大きくしていったときある値 a に限りなく近づくとき $\{a_n\}$ は a に**収束する (converge)** といい, a を**極限値 (limit)** という. これを $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ あるいは $a_n \to a$ $(n\to\infty)$ と表し, 数学的には次で定義する ($n\to\infty$ が明らかなときは省略することもある):

$$\begin{aligned} a_n \to a\ (n\to\infty) \quad &\iff \quad |a_n - a| \to 0\ (n\to\infty) \\ &\overset{\text{def}}{\iff} \quad {}^\forall\varepsilon > 0, {}^\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbf{N}; {}^\forall n \geq N, |a_n - a| < \varepsilon. \end{aligned}$$

この定義は直感的には分かりにくいと思うが, 理解するためには「収束しない」とはどういうことか？ を考えてみれば良い.

問 1.7 「数列 $\{a_n\}$ が a に収束しない」という命題を述べよ.

問 1.8 極限は存在すれば唯一つであることを示せ. ($a_n \to \alpha$, $a_n \to \beta$ として $\alpha = \beta$ を示す.)

問 1.9 $1/n \to 0$ を厳密に証明せよ. (アルキメデスの原理)

数列 $\{a_n\}$ が収束しないとき**発散する (diverge)** という. (± 1 を交互にとって振動する場合も発散という.) 特に $\{a_n\}$ が**正の無限大に発散する**というのを

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \text{or} \quad a_n \to \infty\ (n\to\infty) \ \overset{\text{def}}{\iff}\ {}^\forall M > 0, {}^\exists N = N(M) \in \mathbf{N}; {}^\forall n \geq N, a_n > M$$

と定義する. また $\{-a_n\}$ が正の無限大に発散するとき, $\{a_n\}$ が**負の無限大に発散する**といい,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad \text{or} \quad a_n \to -\infty\ (n\to\infty)$$

と表す.

- $\{a_n\}$ **単調増加 (monotone increasing)**: $a_n \uparrow (n \uparrow \infty) \overset{\text{def}}{\iff} a_1 \leq a_2 \leq \cdots$.
- $\{a_n\}$ **単調減少 (monotone decreasing)**: $a_n \downarrow (n \uparrow \infty) \overset{\text{def}}{\iff} a_1 \geq a_2 \geq \cdots$.

これらを合わせて単調 (数) 列 (monotone sequences) という. ちなみに等号が付かない時は**狭義単調列**といい, それぞれ $a_n \upuparrows, a_n \downdownarrows$ と表す.

- $\{a_n\}$ **上に（下に）有界** $\overset{\text{def}}{\iff}$ ${}^\exists M \in \mathbf{R}$; ${}^\forall n \in \mathbf{N}$, $a_n \leq M$ $(a_n \geq M)$.
- $\{a_n\}$ **有界** $\overset{\text{def}}{\iff}$ ${}^\exists M > 0$; ${}^\forall n \in \mathbf{N}$, $|a_n| \leq M$.

問 1.10 「数列 $\{a_n\}$ が正の（負の）無限大に発散しない」という命題を述べよ. またこれは肯定文でいうとどういうことか？

問 1.11 収束列は有界か？ また逆はどうか？

定理 4 収束列は有界である. ${}^\exists a; a_n \to a\ (n\to\infty) \Rightarrow {}^\exists M; |a_n| \leq M$.

問 1.12 収束列の性質 (和差積商) を述べて, それらを証明せよ.

定理 5 $\lim a_n = \alpha$, $\lim b_n = \beta$ として c を定数とするとき, 次が成り立つ:
(1) $\lim(a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$ (複合同順),
(2) $\lim a_n b_n = \alpha\beta$, 特に $\lim c a_n = c\alpha$,
(3) $\lim a_n/b_n = \alpha/\beta$, 但し, $b_n \neq 0, \beta \neq 0$.

[証] (3) $1/b_n \to 1/\beta$ を示す. 差を通分して $^\exists N_1; {}^\forall n \geq N_1, |b_n - \beta| < |\beta|/2$ より $|b_n| > |\beta|/2$ と $^\forall \varepsilon > 0, {}^\exists N_2; {}^\forall n \geq N_1, |b_n - \beta| < |\beta|^2\varepsilon/2$ を用いれば良い. ■

問 1.13 $a_n \to \alpha \in \mathbf{R}$ なら $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)/n \to \alpha$ を示せ. さらに $\alpha = \pm\infty$ でも同様なことが成り立つことを示せ.

[前半のみ] 条件より $^\forall \varepsilon > 0, {}^\exists N_1; |a_n - \alpha| < \varepsilon/2 \ (n \geq N_1)$. このとき $L = \max\{|a_1 - \alpha|, \ldots, |a_{N_1} - \alpha|\}$ とおくと $^\forall n \geq N_1$ に対して

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k - \alpha\right| &\leq \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{N_1}|a_k - \alpha| + \sum_{k=N_1+1}^{n}|a_k - \alpha|\right)\\ &\leq \frac{N_1 L}{n} + \frac{n - N_1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}\\ &\leq \frac{N_1 L}{n} + \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

更に (第 1 項)$\to 0 \ (n \to \infty)$ より, 上の ε に対して $^\exists N_2; N_1L/n < \varepsilon/2 \ (n \geq N_2)$. よって $^\forall n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$ に対して, (上式)$\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ をえる. $\alpha = \pm\infty$ のときは宿題. ■

定理 6 有界な単調列は収束する. 厳密には, 上に有界な増加列はその上限に収束する.

$$a_n \uparrow \ (n \uparrow \infty), {}^\exists M; a_n \leq M \ \Rightarrow \ {}^\exists \alpha; a_n \to \alpha \ (n \to \infty).$$

[証] 単調増加列のとき $\alpha = \sup a_n$ とおけば $\lim a_n = \alpha$ が示せる. 単調減少列も同様. ■

収束列・極限値の例

1, $a > 0$ なら $\lim \sqrt[n]{a} = 1$. 2. $\lim \sqrt[n]{n} = 1$. 3. $a > 1, k \geq 0$ なら $\lim a^n/n^k = \infty$.
4. $a > 0$ なら $\lim a^n/n! = 0$. 5. $^\exists \lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n =: e$ と表す.

1. $a > 1$ なら $\sqrt[n]{a} \downarrow, \geq 1$ より $^\exists \lim a_n =: \alpha \geq 1$. $\alpha > 1$ とすると $h := 1 - \alpha > 0$ として $\sqrt[n]{a} > \alpha = 1 + h$, i.e., $a = (1+h)^n > 1 + nh \to \infty$ で矛盾. $a = 1$ なら明らか. $0 < a < 1$ なら逆数を考えればよい.)
2. ($a_n := \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$ として $n = (1 + a_n)^n \geq 1 + na_n + n(n-1)a_n^2/2 > n(n-1)a_n^2/2$, i.e., $(\sqrt[n]{n} - 1)^2 = a_n^2 < 2/(n-1)$, 即ち, $|\sqrt[n]{n} - 1| < \sqrt{2/(n-1)} \to 0$.

命題 1 $^\exists \lim |a_{n+1}/a_n| =: r$ とする. $0 \leq r < 1 \Rightarrow a_n \to 0, r > 1 \Rightarrow |a_n| \to \infty$.
$^\exists \lim \sqrt[n]{a_n} =: r$ でも同様.

証明は $0 < r < 1$ なら $r < r_1 < 1$ をとり, $\varepsilon = r_1 - r > 0$ として, $r > 1$ なら $r > r_2 > 1$ をとり, $\varepsilon = r - r_2 > 0$ として, 等比数列と比較すれば明らか.

3, 4. $a_{n+1}/a_n = a(n/(n+1))^k \to a$, $a_{n+1}/a_n = a(n/(n+1))^k \to a$ で上の命題より.
5. 上に有界な増加列であることから O.K. しかも $2 < e \leq 3$ も分る. (実際は $e < 3$.)

$$\begin{aligned}&(1 + 1/n)^n\\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \uparrow\\ &\leq 1 + 1 + 1/2! + 1/3! + \cdots + 1/n!\\ &\leq 1 + 1 + 1/2! + 1/2^2 + \cdots + 1/2^{n-1} < 1 + 1/(1 - 1/2) = 3\end{aligned}$$

■

問 $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ に対し, $\dbinom{n}{k}\dfrac{1}{n^k} = \dfrac{1}{k!}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)\left(1 - \dfrac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \dfrac{k-1}{n}\right)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ を確かめ, 上の計算の最初の変形を説明せよ.

問 O- 1 (1) $\lim(1-1/n)^{-n}=?$ (2) $\lim(1-1/n)^{n^2}=?$

問 O- 2 $\sum_{n\geq 1} a_n := \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} a_n$ で $a_n \geq 0$ のとき**正項級数**というが, 上の命題で $0<r<1$ なら $\sum_{n\geq 1} a_n$ は収束し, $r>1$ なら発散することを示せ.
(等比級数との比較より明らか. ちなみに $r=1$ のときは一般には判定できない.)

定理 7 (区間縮小法) 区間の列 $[a_n, b_n]$ が $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ ($^\forall n \geq 1$), $b_n - a_n \to 0$ $(n\to\infty)$ をみたすなら $^\exists c; a_n \leq c \leq b_n, a_n \to c, b_n \to c$ $(n\to\infty)$. (or $^{\exists_1} c \in \cap[a_n, b_n] = \{c\}$.)

[証] 有界な単調列が収束することと 2 番目の条件より明らか. ■

定理 8 (Bolzano-Weierstrass の定理) 有界な無限列は収束部分列をもつ.

$$\{a_n\}_{n\geq 1}; |a_n| \leq {}^\exists L\ (n\geq 1) \ \Rightarrow\ {}^\exists\alpha, {}^\exists\{a_{n_k}\} \subset \{a_n\}; a_{n_k} \to \alpha\ (k\to\infty).$$

[証] 区間 $I_0 = [-L, L]$ を 2 等分し, $\{a_n\}$ を無限に含む区間を I_1 とする. (両方のときは左側と決めておく.) 以下同様に, 縮小区間列 $\{I_k\}$ を決める. 各区間から $a_{n_k} \in I_k \cap \{a_n\}$ $(k\geq 1)$ を $n_k \upuparrows \infty$ なるようにとれることに注意すれば, 後は区間縮小法より明らか. ■

定理 9 有界な数列に対して [収束する $\iff$ 任意の収束部分列の極限値が全て同じ].
$\{a_n\}; |a_n| \leq {}^\exists L$ $(n\geq 1)$ に対して

$$a_n \to \alpha\ (n\to\infty) \iff [{}^\forall\{a_{n_k}\} \subset \{a_n\}; a_{n_k} \to {}^\exists\beta], \beta = \alpha.$$

[証] $(\Rightarrow)$ は収束列の部分列は同じ値に収束することから明らか. $(\Leftarrow)$ はどんな収束部分列も同じ値に収束するならもとの数列自体がその値に収束することを示せば良い. もし $a_n \not\to \alpha$ とすると有界性から α に収束しない収束部分列が存在することがいえ, 仮定に反する. 実際, $^\exists\epsilon_0 > 0; {}^\forall k \geq 1, {}^\exists n_k \geq k; |a_{n_k} - \alpha| \geq \epsilon_0$ で, しかも $n_k \upuparrows \infty$ ととれる. この $\{a_{n_k}\}$ から収束部分列 $\{a_{n_{k_j}}\}; a_{n_{k_j}} \to \beta$ をとれば, 明らかに $\beta \neq \alpha$ となり, 矛盾. ■

問 1.14 収束列の任意の部分列は同じ値に収束することを示せ.

数列 $\{a_n\}$ が**コーシー列 (Cauchy sequence)** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $a_n - a_m \to 0$ $(m, n\to\infty)$, i.e.,
$^\forall\varepsilon > 0, {}^\exists N; {}^\forall n, m \geq N, |a_n - a_m| < \varepsilon$.

定理 10 (コーシーの判定法) 数列が収束 $\iff$ コーシー列である.

$$a_n \to \alpha\ (n\to\infty) \iff a_n - a_m \to 0\ (m, n\to\infty).$$

[証] $(\Rightarrow)$ は三角不等式を用いれば明らか. $(\Leftarrow)$ はコーシー列なら有界列で, 収束部分列がとれる. これから元のコーシー列自身が同じ値に収束することが示せる. ■

問 1.15 上の証明を正確に述べよ.

[解] $(\Rightarrow)$ $|a_n - a_m| \leq |a_n - \alpha| + |\alpha - a_m| \to 0$ $(m, n\to\infty)$. $(\Leftarrow)$ $^\exists N_1; {}^\forall m, n \geq N_1, |a_n - a_m| < 1$ より, $^\forall n \geq 1$, $|a_n| \leq \max\{|a_N|+1, |a_1|, \dots, |a_{N-1}|\} < \infty$ で $\{a_n\}$ は有界. よって Bolzano-Weierstrass の定理より $^\exists\{a_{n_k}\} \subset \{a_n\}; \lim a_{n_k} (=: \alpha)$. 更に元がコーシー列なので $^\forall\epsilon > 0, {}^\exists N; {}^\forall n, n_k \geq N, |a_n - a_{n_k}| < \epsilon$. ここで $k\to\infty$ として $|a_n - \alpha| \leq \epsilon$ をえる.

系 2 コーシー列の部分列が収束すればその数列自身が同じ値に収束する.

上極限・下極限 (Upper limits, Lower limits)

- **上極限** $\limsup a_n := \lim_{N\to\infty} \sup_{n\ge N} a_n = \inf_{N\ge 1} \sup_{n\ge N} a_n$.
- **下極限** $\liminf a_n := \lim_{N\to\infty} \inf_{n\ge N} a_n = \sup_{N\ge 1} \inf_{n\ge N} a_n$.

このとき $\liminf a_n \le \liminf a_n$. また $\liminf a_n = \liminf a_n \Rightarrow {}^{\exists} \lim a_n = \liminf a_n = \liminf a_n$.

問 1.16 証明せよ. (${}^{\forall}N_1, N_2 \ge 1, N := N_1 \vee N_2$ とおくと $\inf_{n\ge N_1} a_n \le a_N \le \sup_{n\ge N_2} a_n$)

1.3 関数の極限 (Limits of Functions)

実数のある集合 D の各元 x に実数を 1 つずつ y (2 つ以上はダメ) 対応させる規則を**関数 (functions)** といい, $f : D \to \mathbf{R}; x \mapsto y$, $y = f(x)$ などと表す. (D を**定義域**, $f(D) = \{y \in \mathbf{R}; y = f(x), x \in D\}$ を**値域**という) $y = x^2$. $y = \sqrt{x}$ などは関数である. しかし $x \in \mathbf{R}$ に対し, y を $x^2 + y^2 = 1$ をみたす値として決めたときは $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ で関数とはならない.
(本当の定義は 2 つ以上の実数が対応していても関数といい, 1 つだけのときは **1 価関数**, 2 つ以上とりうるときは**多価関数**という. しかし普通, 単に関数といったときには 1 価関数を指すので, ここではこのままにしておく.)

$a \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$ に対して $U_\delta(a) = (a-\delta, a+\delta)$ を a の (δ-) **近傍 (neighborhood)** という.

関数 $f(x)$ は $x = a$ のある近傍で定義されているとする ($x = a$ では定義されていなくても良い).

- $x \to a$ のとき $f(x) \to \alpha \overset{\text{def}}{\iff} {}^{\forall}\varepsilon > 0, {}^{\exists}\delta = \delta(\varepsilon) > 0; 0 < |{}^{\forall}x - a| < \delta, |f(x) - \alpha| < \varepsilon$.
- $x \to a$ のとき $f(x) \to \infty \overset{\text{def}}{\iff} {}^{\forall}L > 0, {}^{\exists}\delta = \delta(L) > 0; 0 < |{}^{\forall}x - a| < \delta, f(x) \ge L$.

($x = a$ でも定義されていて, しかも $\alpha = f(a)$ のとき $x = a$ で連続という $\to$ 次節.)

関数 $f(x)$ は (a, ∞) で定義されているとする.

- $x \to \infty$ のとき $f(x) \to \alpha \overset{\text{def}}{\iff} {}^{\forall}\varepsilon > 0, {}^{\exists}M = M(\varepsilon) > a; {}^{\forall}x \ge M, |f(x) - \alpha| < \varepsilon$.
- $x \to \infty$ のとき $f(x) \to \infty \overset{\text{def}}{\iff} {}^{\forall}L > 0, {}^{\exists}M = M(\varepsilon) > a; {}^{\forall}x \ge M, f(x) \ge L$.

他に $-\infty$ のときも同様.

問 1.17 上の否定命題を述べよ.

$x \to a, x > a$ のとき $x \to a+0$ と表し, $x \to a, x < a$ のとき $x \to a-0$ と表す.

- [**右極限**] $f(a+) = f(a+0) := \lim_{x\to a+0} f(x) \iff {}^{\forall}\varepsilon > 0, {}^{\exists}\delta = \delta(\varepsilon) > 0; 0 < {}^{\forall}x - a < \delta, |f(x) - f(a+)| < \varepsilon$.

左極限も同様で $f(a-) = f(a-0) := \lim_{x\to a-0} f(x)$ で定義する. まとめて**片側極限**という

- **狭義増加関数 (単調増加関数)** $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- **増加関数 (広義単調増加関数)** $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$

注意 1 実は (·) 内の呼び方は古い. (教科書によって異なるのだが.) 最近の論文などでは誤解を避けるため上を**狭義増加 (strictly increasing)**, 下を**非減少 (non-decreasing)** と呼ぶことが多くなっている.

- **有界関数 (bounded function)** 値域が有界な関数. $|f(x)| \le {}^\exists M$ $({}^\forall x \in D)$.

問 1.18 有界な単調関数は各点 ($\pm\infty$ も含む) で右極限、左極限をもつか？(もつ)

命題 2 次を示せ. (1) $0 < x < \pi/2$ なら $\sin x < x < \tan x$. (2) $x \neq 0$ なら $|\sin x| < |x|$.

[証] (1) 面積の比較より明らか. (2) $x \ge \pi/2$ なら $|\sin x| \le 1 < \pi/2 \le x$ で (1) と合わせて $x > 0$ は O.K. $x < 0$ のときは $|\sin x| = |\sin(-x)| < -x = |x|$ で成り立つ. ■

例 1 次を示せ.

$$(1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \quad (2)\ \lim_{x\to 0} a^x = 1\ (a>0), \quad (3)\ \lim_{x\to\infty}\left(1 \pm \frac{1}{x}\right)^x = e^{\pm 1}\ (\text{複号同順}).$$

[解] (1) 上の問より $0 < x < \pi/2$ なら $\cos x < \sin x/x < 1$, $-\pi/2 < x < 0$ でも $\sin x/x = \sin(-x)/(-x)$ より O.K. (2) $0 < x < 1$ とする. $a > 1$ なら $n = [1/x]$ として $n \le [1/x] < n+1$ より $a^{1/(n+1)} < a^x \le a^{1/n}$ となり O.K. $a = 1$ なら明らか. $0 < a < 1$ なら $1/a$ で考えれば O.K. $-1 < x < 0$ なら $a^x = (1/a)^{-x}$ で上のことから O.K. (3) x の整数部分 $[x]$ を考える. $[x] \le x < [x]+1$ で, 次から O.K.:

$$\left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}.$$

($[x]$ **Gauss 記号**: x を超えない最大整数; $[x] \le x < [x]+1$.) ■

問 1.19 (3) で $x \to -\infty$ のときは？(同じ.) また $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\log(1+h)}{h} = 1, \lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h} = 1$ を示せ.

問 1.20 $\lim_{x\to a} f(x) > 0$ なら a のある近傍でも $f(x) > 0$ となるか？ (なる)

定理 11
(1) [**連続変数と数列**] ${}^\exists \lim_{x\to a} f(x) \iff {}^\forall\{x_n\}; x_n \to a\ (x_n \neq a), {}^\exists \lim_{n\to\infty} f(x_n)$
(2) [**Cauchy の判定法**] ${}^\exists \lim_{x\to a} f(x) \iff {}^\forall\varepsilon > 0, {}^\exists\delta > 0; {}^\forall x_1, x_2; 0 < |x_1 - a| < \delta, 0 < |x_2 - a| < \delta, |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

[証] (1) ($\Rightarrow$) は明らか. ($\Leftarrow$) はまず極限値 $\lim f(x_n)$ が数列 $\{x_n\}$ の取り方によらないことに注意する. 実際, $x_n \to a, x'_n \to a$ $(x_n, x'_n \neq a)$ として, これを交互に並べた数列を $\{x''_n\}$ とすると $x''_n \to a$ で $\alpha := \lim f(x''_n)$ とおくと $\{f(x_n)\}$, $\{f(x'_n)\}$ も $\{f(x''_n)\}$ の部分列であるから同じ値 α に収束する. 次にもし $\lim_{x\to a} f(x) \neq \alpha$ と仮定すると

$${}^\exists\varepsilon_0 > 0; {}^\forall\delta > 0, {}^\exists x = x(\delta); 0 < |x - a| < \delta, |f(x) - \alpha| \ge \varepsilon_0.$$

ここで ${}^\forall n \in \mathbf{N}$ に対して, $\delta = 1/n$ として $x_n := x(\delta)$ と表すことにすると $0 < |x_n - a| < 1/n, |f(x_n) - \alpha| \ge \varepsilon_0$. これは矛盾である. よって $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$.
(2) ($\Rightarrow$) は明らか. ($\Leftarrow$) は ${}^\forall\{x_n\}; x_n \neq a, x_n \to a$ に対して $\{f(x_n)\}$ がコーシー列であることが容易に示せて, 従って収束するので, 上の (1) の結果から成り立つ. ■

問 1.21 上の (2) の証明を正確に述べよ.

上の (1) と数列のときの結果から次を得る.

定理 12 関数の極限は四則演算を保つ. 即ち, $x \to a$ のとき, $f(x) \to \alpha, g(x) \to \beta$ なら, $f(x) \pm g(x) \to \alpha + \beta$, $cf(x) \to c\alpha$ (c: 定数), $f(x)g(x) \to \alpha\beta$, $f(x)/g(x) \to \alpha/\beta$ $(g(x) \neq 0, \beta \neq 0)$.

1.4 連続関数 (Continuous Functions)

関数 $f(x)$ が $x = a$ の近くで定義されているとする.

- 関数 $f(x)$ が $x = a$ で**連続 (continuous)** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$
  $\Longleftrightarrow$ ${}^\forall\varepsilon > 0, {}^\exists\delta = \delta(a, \varepsilon) > 0; |{}^\forall x - a| < \delta, |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$

  否定すると $f(x)$ が $x = a$ で連続でない $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^\exists\varepsilon_0 > 0; {}^\forall\delta > 0, {}^\exists x_\delta; |x_\delta - a| < \delta; |f(x_\delta) - f(a)| \geq \varepsilon_0.$

- 関数 $f(x)$ が $x = a$ で**右連続 (right continuous)** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a)$
  $\Longleftrightarrow$ ${}^\forall\varepsilon > 0, {}^\exists\delta = \delta(a, \varepsilon) > 0; 0 < {}^\forall x - a < \delta, |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$

  左連続も同様. まとめて**片側連続**という.

- また関数 $f(x)$ が区間 I で連続 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $f(x)$ が ${}^\forall a \in I$ で連続. 但し, I の端点が I に属しているとき, 端点では片側連続でよい. これから上の定義は

$$ {}^\forall a \in I, {}^\forall\varepsilon > 0, {}^\exists\delta = \delta(a, \varepsilon) > 0; {}^\forall x \in I; |x - a| < \delta, |f(x) - f(a)| < \varepsilon. $$

  連続でないとき**不連続 (discontinuous)** という.

多項式 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, 正弦・余弦関数 $\sin x, \cos x$, 指数関数 a^x $(a > 0)$ は全て $(-\infty, \infty)$ で連続. (**問** これらを確かめよ. 特に指数関数については, 定義を確認せよ. 本節の最後.)

問 1.22 連続関数 $f(x)$ に対して $f(a) > 0$ なら a の近傍で $f(x) > 0$ となるか？(なる)

定理 13 連続関数も四則演算を保つ. (関数の極限のときと同様)

直接, 示すこともできる. 実際, f, g を $x = a$ で連続として, $f + g$, αf $(\alpha \in \mathbf{R})$ もそうなのは容易で, 次に f^2 もそうなのは, a の近傍で f が有界であることに注意すれば, 容易に分かる. これらから $fg = \{(f + g)^2 + (f - g)^2\}/4$ もうそう. 最後に $f \neq 0$ に対し, $1/f$ については $1/f(x) - 1/f(a)$ を通分し, a のある近傍で $|f(x)| \geq |f(a)|/2$ とできることと, $|f(x) - f(a)| < |f(a)|^2\epsilon/2$ を用いれば良い.

定理 14 (中間値の定理) 閉区間上で連続な関数は端点での値の間の値をその区間内でとる.
関数 $f(x)$ は区間 $[a, b]$ 上で連続で, $f(a) \neq f(b)$ なら (a, b) で $f(a)$ と $f(b)$ の間の値をすべてとる.
$f(x)$ conti. on $[a, b]$, $f(a) < f(b) \Rightarrow {}^\forall y \in (f(a), f(b))$ ${}^\exists c \in (a, b); f(c) = y.$

証 $c = \sup\{x \in [a, b]; f(x) \leq y\}$ とおけば連続性から $f(c) = y$ となる. ■

定理 15 (最大値・最小値の定理) 有界閉区間上の連続関数はそこで最大値・最小値をとる.
$f(x)$ conti. on $[a, b] \Rightarrow {}^\exists c, d \in [a, b]; f(c) \leq f(x) \leq f(d)$ $(x \in [a, b])$.

[証] $M = \sup\{f(x); x \in [a,b]\}$ とおくと上限の性質より $^{\exists}\{x_n\} \subset [a,b]; f(x_n) \uparrow M$. さらに Bolzano-Weierstrass の定理より $^{\exists}d \in [a,b], ^{\exists}\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}; x_{n_k} \to d$. よって連続性から $M = f(d)$. 最小値については $-f(x)$ を考えればよい. ■

- 関数 $f(x)$ が区間 I で**一様連続 (uniformly continuous)**
  $\overset{\text{def}}{\iff} {}^{\forall}\varepsilon > 0, {}^{\exists}\delta = \delta(\varepsilon) > 0; {}^{\forall}x, y \in I; |x-y| < \delta, |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$

  否定は $f(x)$ が I で一様連続でない $\iff {}^{\exists}\varepsilon_0 > 0; {}^{\forall}\delta > 0, {}^{\exists}x_\delta, y_\delta; |x_\delta - y_\delta| < \delta; |f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \varepsilon_0$.

定理 16 有界閉区間上の連続関数は一様連続である.

問 1.23 背理法で証明せよ.

[証] もし有界閉区間 I 上, 一様連続でないとすると $^{\exists}\varepsilon_0 > 0, ^{\forall}n \geq 1, ^{\exists}x_n, y_n \in I; |x_n - y_n| < 1/n$, $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$. Bolzano-Weierstrass の定理より $^{\exists}c \in I, ^{\exists}\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}; x_{n_k} \to c$. 上から $y_{n_k} \to c$ も分かる. よって連続性から $f(c) = \lim f(x_{n_k}) = \lim f(y_{n_k})$. ところが $0 = \lim |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon_0 > 0$ となり矛盾する. ■

問 1.24 連続だが一様連続でない関数の例を挙げて, それをちゃんと証明せよ. ($\sin 1/x$, $1/x = 2n\pi, 1/y = (2n + 1/2)\pi$.)

関数 $f(x)$ が定義域 D から値域 $f(D)$ への 1 対 1 写像のとき (i.e., $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$) その逆の対応を $y = f^{-1}(x)$ $(x \in f(D))$ で表し, f の**逆関数 (Inverse function)** という.

定理 17 閉区間上, 連続な狭義単調関数は連続で狭義単調な逆関数をもつ.
f; conti, $f \uparrow\uparrow$ (or $\downarrow\downarrow$) on $[a,b] \Rightarrow {}^{\exists}f^{-1}$; conti, $f \uparrow\uparrow$ $(\downarrow\downarrow)$ on $[f(a), f(b)]$ (or $[f(b), f(a)]$).

問 1.25 次の命題を証明することにより, 上の定理を証明せよ.

命題 3 $I = [a,b]$ で単調な関数 $f(x)$ が $f(a)$ と $f(b)$ の間の全ての値をとれば, I 上連続である

(f を増加関数として示す. $a < x_0 \leq b$ に対し, $f(x_0-) = f(x_0)$ を背理法で示す. 即ち, $f(x_0-) < f(x_0)$ と仮定して矛盾をいう. 同様に $a \leq x_0 < b$ に対しても $f(x_0+) = f(x_0)$ が示せる.)

[逆三角関数] (グラフで説明) $\sin^{-1} x = \arcsin x$, $\cos^{-1} x = \arccos x$, $\tan^{-1} x = \arctan x$ をそれぞれ $\sin x$ on $[-\pi/2, \pi/2]$, $\cos x$ on $[0, \pi]$, $\tan x$ on $(-\pi/2, \pi/2)$ の逆関数 (定義域に注意！) で**逆正弦関数, 逆余弦関数, 逆正接関数**という.

$S, T \subset \mathbf{R}$ とし, 関数 f, g を $f : S \to \mathbf{R}$, $g : T \to \mathbf{R}$ で $f(S) \subset T$ とする.
$g \circ f(x) := g(f(x))$ で定義される関数 $g \circ f : S \to \mathbf{R}$ を f と g の**合成関数**という.

定理 18 連続関数の合成関数も連続, i.e., f, g; conti, $g \circ f$ well-defined $\Rightarrow g \circ f$; conti, 特に $\lim\limits_{x \to a} g \circ f(x) = g(\lim\limits_{x \to a} f(x))$ が成り立つ.

問 1.26 上の定理を証明せよ.

三角関数 $\sin x, \cos x$ の連続性 $h \to 0$ のとき, $|\sin(a+h) - \sin a| = 2|\cos \frac{2a+h}{2} \sin \frac{h}{2}| \le 2|\sin(h/2)| \le |h| \to 0$. $\cos(a+h) - \cos a = -2 \sin \frac{2a+h}{2} \sin \frac{h}{2}$ より, 同様.

指数関数 a^x の定義 $(a > 0)$: x が有理数 $r = m/n \in \mathbf{Q} = \mathbf{Z}/\mathbf{N}$ のとき, $y = a^r$ を方程式 $y^n = a^m$ の正の解として定義. この解は r の表現に依らず一意に決まることが分かる. このとき指数法則 $a^r \cdot a^s = a^{r+s}, (a^r)^s = a^{rs}, (ab)^r = a^r b^r$ $(a, b > 0, r, s \in \mathbf{Q})$ と $a > 1, r > 0 \Rightarrow a^r > 1$ を満たす. x が無理数のとき, $a > 1$ なら $a^x = \sup\{a^r; r < x, r \in \mathbf{Q}\}$ として定義. $a = 1$ なら $a^x = 1$, $0 < a < 1$ なら $a^x = 1/(1/a)^x$ として定義. このとき指数法則を満たすことは容易に分かる.

$a > 1$ のときの連続性は $a^{1/n} \to 1$ $(n \to \infty)$ と $|h| < 1/n$ なら $a^{-1/n} < a^h < a^{1/n}$ から $a^h \to 1$ $(h \to 0)$ を得るので, $x \to c$ のとき, $a^x = a^c \cdot a^{x-c} \to a^c \cdot 1 = a^c$. 他も明らか.

2 1 変数関数の微分 (Derivatives of Functions)

2.1 微分法 (Differential Methods)

関数 $f(x)$ は $x=a$ の近傍で定義されているとする.

- $f(x)$ が $x=a$ で**微分可能 (可微分; differentiable)**
  $\overset{\text{def}}{\iff} \ \exists \lim_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ (=: $f'(a)$ と表す.)
  この $f'(a)$ を $f(x)$ の $x=a$ での**微 (分) 係数**という. また $x\to a\pm 0$ or $h\to 0\pm 0$ を考えることにより**片側微分 (右微分・左微分)** という概念も極限のときと同様に定義される.

  この定義だけから, 次は直ぐに分る:

命題 $f(x)$ が $x=a$ で可微分のとき, $f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+o(x-a)$ $(x\to a)$.
特に, $a=0$ のとき, $f(x)=f(0)+f'(0)x+o(x)$ $(x\to 0)$.

これは, $f(x)$ が a で可微分なら, その近くで, 1 次関数近似できることを表している.

ここで, 最後のスモール・オー $o(x-a)$ は, 「誤差項」で, 中身で割って, $x-a\to 0$ のとき, 0 に収束するものである. つまり, $h(x)=o(g(x))$ $x\to a$ $\overset{\text{def}}{\iff}$ $h(x)/g(x)\to 0$ $(x\to a)$. 別表現をすると, $h(x)=o(1)g(x)$ $(x\to a)$ と同じこととなる. ($o(1)\to 0(x\to a)$ である.)

上の $o(x-a)=o(1)(x-a)$ は $x-a$ が 0 に行くよりは速く 0 に行く項を表している.

上の定理では, 微分の定義から, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'(a)\to 0(x\to a)$ なので, この式が $o(1)$ で, 両辺を $x-a$ 倍して, $f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)=o(1)(x-a)=o(x-a)$.

この「スモール・オー」 $o(*)$ という記号は, 最初は分り難いが, 慣れてくると, 非常に便利な記号・記法である.

- $f(x)$ が区間 I で微分可能 $\overset{\text{def}}{\iff}$ I の各点で微分可能.
  (但し, 端点が I に属しているときはそこで片側微分をもつだけで良いとする.) このとき $f'(x)$ を $f(x)$ の**導関数**という. $y=f(x)$ の導関数を次のように表すこともある.

$$f^{(1)}(x), \quad \frac{df(x)}{dx}, \quad \frac{df}{dx}(x), \quad \frac{d}{dx}f(x), \quad \frac{dy}{dx}(x), \quad y'.$$

- この $f'(x)$ が連続のとき, C^1 **級** であるといい, C^1 **(級) 関数** という. (長々しく **1 回連続的微分可能, 1 回連続的微分可能関数**という言い方もある.)

- さらに $f'(x)$ が微分可能のとき $f(x)$ は**2 回微分可能**であるといい, $(f')'(x)$ を $f''(x)=f^{(2)}(x)$ と表し, **2 階導関数**という.

  以下同様に $f(x)$ が n **回微分可能**を定義し, その n **階導関数**を $f^{(n)}(x)$ で表す. もちろん, $f^{(1)}(x)=f'(x), f^{(2)}(x)=f''(x),\dots$ である. また便宜上 $f^{(0)}(x):=f(x)$ とする.

  C^n **級**, C^n **(級) 関数**も同様に定義する. (n **回連続的微分可能 (関数)** などともいう.) さらに全ての $n\in\mathbf{N}$ に対し, C^n 級であるとき C^∞ 級 (関数) であるという. (**無限回連続的微分可能 (関数)** ともいう.)

  下に述べる定理により実際は

  $f(x)$ が C^n 級 $\iff$ n 回微分可能で $f^{(n)}(x)$ が連続.

定理 19 微分可能なら連続, i.e., $^{\exists}f'(x) \Rightarrow f$ conti. at x.

定理 20 f, g: n 回微分可能

(1) $(af+bg)^{(n)} = af^{(n)} + bg^{(n)}$ $(a, b \in \mathbf{R})$.

(2) $(fg)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$ (**ライプニッツの公式**). 但し, $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.

定理 21 (合成関数・逆関数の微分)

(1) $u = g(y)$, $y = f(x)$ が微分可能なら, 合成関数 $u = g(f(x))$ も微分可能で

$$(g(f(x))' = g'(f(x))f'(x), \quad \text{i.e.,}\ \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx}.$$

(2) 区間 I 上で微分可能な単調関数 $y = f(x)$ の $f(I)$ 上での逆関数 $x = f^{-1}(y)$ は $y = f(x)$ $(x; f'(x) \neq 0)$ で微分可能で

$$\frac{df^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{f'(x)}\ (y = f(x)) \quad \text{i.e.,}\ \frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}.$$

微分の例

- **指数関数, 対数関数の微分**

  (1) $(e^x)' = e^x$ (2) $(a^x)' = a^x \log a$ $(a > 0)$ (3) $(\log|x|)' = 1/x$ $(x \neq 0)$

  (4) $(\log_a |x|)' = 1/(x \log a)$ $(a > 0, a \neq 1, x \neq 0)$

  (5) f 微分可能 $\Rightarrow (\log|f(x)|)' = f'(x)/f(x)$ $(x; f(x) \neq 0)$

- **逆三角関数の微分**

  (1) $(\sin^{-1} x)' = 1/\sqrt{1-x^2}$ $(-1 < x < 1)$ (2) $(\cos^{-1} x)' = -1/\sqrt{1-x^2}$ $(-1 < x < 1)$

  (3) $(\tan^{-1} x)' = 1/(1+x^2)$ $(-\infty < x < \infty)$

- **高次導関数**

  (1) $(x^a)^{(n)} = a(a-1)\cdots(a-n+1)x^{a-n}$, 特に, $(1/x)^{(n)} = (-1)^n n! x^{-n-1}$

  (2) $(a^x)^{(n)} = a^x(\log a)^n$ $(a > 0)$, 特に $(e^x)^{(n)} = e^x$

  (3) $(\log|x|)^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)! x^{-n}$ $(x \neq 0)$

  (4) $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + n\pi/2)$ (5) $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n\pi/2)$

- **エルミート多項式** $n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \dfrac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}$ は n 次多項式.

定理 22 (媒介変数での微分) $x = f(t)$, $y = g(t)$ を微分可能とすると $x = f(t)$ が単調で $f'(t) \neq 0$ なる区間で y は x の関数として微分可能で

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt} = \frac{g'(t)}{f'(t)}.$$

問 2.1 上の微分の計算と定理の証明をせよ.

2.2 テイラーの定理 (Taylor's Theorem)

$x=a$ の近くで定義されている関数 $f(x)$ が
$x=a$ で**極大 (極小)** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^\exists\delta>0; {}^\forall x\in(a-\delta,a+\delta), f(a)>f(x)$ $(f(a)<f(x)$.
このとき $f(a)$ を**極大値 (極小値)** といい, まとめて**極値**という.

また上で不等号を $\geq$ $(\leq)$ に変えたとき, **広義の極大 (広義の極小)** といい, **広義の極大値 (広義の極小値), 広義の極値**も同様に定義する.

定理 23 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能で, 広義の極値をとるなら $f'(a)=0$. (逆は, 一般にいえないが, $f'(a)=0$ なら $x=a$ で広義の極値をとる可能性はある.)

微分の定義から, (右極限 = 左極限) でそれぞれ 0 以上, 0 以下となるから明らか.

定理 24 (ロル (Rolle) の定理) 関数 $f(x)$ が区間 $[a,b]$ で連続, (a,b) で微分可能とする. $f(a)=f(b)$ なら ${}^\exists c\in(a,b); f'(c)=0$.

[証] f が定数なら明らか. $f(x)$ が $f(a)=f(b)$ より大きい値をとりうるときを考える. 即ち, ${}^\exists x\in(a,b); f(x)>f(a)$. 最大・最小値定理より, ${}^\exists c\in(a,b); f(c)=\max_{[a,b]} f>f(a)$. この $f(c)$ は極大値でもあるから前定理より $f'(c)=0$. $f(x)$ が $f(a)=f(b)$ より小さい値をとりうるときは $-f(x)$ を考えればよい. ■

定理 25 (平均値の定理) 関数 $f(x)$ が区間 $[a,b]$ で連続, (a,b) で微分可能とする. このとき

$$ {}^\exists c\in(a,b); \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c). $$

[証] 次の関数 $\varphi(x)$ に対し, $\varphi(a)=\varphi(b)=0$ より, ロルの定理を適応すれば良い:

$$ \varphi(x):=f(x)-\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\right). $$

■

系 3 $f'=0$ on $(a,b)\Rightarrow f=\text{const.}$ on (a,b).

[証] 平均値の定理を ${}^\forall[a',b']\subset(a,b)$ に対して適応すれば, $f(a')=f(b')$ をえることから明らか. ■

定理 26 (Cauchy の平均値の定理) 関数 $f(x), g(x)$ が区間 $[a,b]$ で連続, (a,b) で微分可能で, $g'(x)\neq 0$ とする. このとき

$$ {}^\exists c\in(a,b); \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}. $$

g に対する平均値の定理より $g(b)-g(a)\neq 0$ に注意しておく.
[証] 次の関数 $\varphi(x)$ にロルの定理を用いれば良い:

$$ \varphi(x)=[g(b)-g(a)][f(x)-f(a)]-[f(b)-f(a)][g(x)-g(a)]. $$

$0=\varphi'(c)=[g(b)-g(a)]f'(c)-[f(b)-f(a)]g'(c)$ より O.K. ■

極限が形式的に $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, $0/0$, $\pm\infty/\infty$, 1^∞, ∞^0 などになるとき**不定形**という.

定理 27 (ロピタルの定理) 下の**条件**のもと不定形の極限は $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = \lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$ で与えられる.

条件: f, g が a のある近傍 U で a を除いて可微分かつ $g' \neq 0$, [共に a で連続, $f(a) = g(a) = 0$] または $[\lim_{x\to a} g(x) = \infty]$ をみたし, しかも $^\exists \lim_{x\to a} f'(x)/g'(x) \in [-\infty, \infty]$ なら成立. また a を $a \pm 0$, $\pm\infty$ にかえても成立.

例えば $a = \infty$ のとき　[f, g は十分大きい x について可微分かつ $g' \neq 0$ で, $f(\infty) = g(\infty) = 0$, i.e., $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$] とする.

[証] (1) [共に a で連続, $f(a) = g(a) = 0$] のとき. コーシーの平均値の定理より a に近い $x \neq a$ に対し, $^\exists c = c(x); x < c < a$ or $a < c < x$,

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

よって $x \to a$ とすればよい.

(2) $[\lim_{x\to a} g(x) = \infty]$ のとき. まず $^\exists \lim_{x\to a} f'(x)/g'(x) = \gamma \in (-\infty, \infty)$ として $x \to a + 0$ のときを考える.

$$^\forall \varepsilon > 0, {}^\exists x_0 > a; a < {}^\forall x < x_0, \quad \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - \gamma \right| < \varepsilon.$$

上の x を一つとめて, コーシーの平均値の定理より

$$^\exists c = c(x); (a <)\ x < c < x_0, \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

左辺の分母・分子を $g(x) \neq 0$ で割って,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \left(1 - \frac{g(x_0)}{g(x)} \right) + \frac{f(x_0)}{g(x)}.$$

よって $x \to a + 0$ のとき $g(x) \to \infty$ より $\dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)} \left(-\dfrac{g(x_0)}{g(x)} \right) + \dfrac{f(x_0)}{g(x)} \to 0$. これから $^\exists \delta > 0; a < {}^\forall x < a + \delta\ (\leq c)$,

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \gamma \right| \leq \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f'(c)}{g'(c)} \right| + \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - \gamma \right| < 2\varepsilon.$$

$x \to a - 0$ のときも同様.

$\gamma = \pm\infty$ の場合も同様に示せる.

最後に $x \to \infty$ (or $-\infty$) のときは $x = 1/y$ と変換することにより $y \to +0$ (or -0) の場合に帰着できる. ■

問 2.2　ロピタルの定理を用いて次の極限を求めよ.

(1) $\lim_{x\to\infty} e^x/x^a$ (a: 定数)　(2) $\lim_{x\to\infty} x^a/\log x$ $(a > 0)$

(3) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$　(4) $\lim_{x\to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x}$ $(a, b > 0)$　$[\infty, \infty, 1/6, \log(a/b)]$

上の問のように, ロピタルの定理を用いて, ある点で n 回微分可能なら, その点の近くで, n 次多項式近似できることが示せるのだが, その話は, 本節の最後に回すとして, もう少し強い条件の下では, n 階微分までを用いて, 極限ではなく, 等式で表現できることが示せる. それが, 次の結果である:

定理 28 (Taylor の定理) 関数 $f(x)$ は開区間 I で n 回微分可能とする. $^\forall a, b \in I; a < b$ (or $a > b$), $^\exists c \in (a, b)$ (or (b, a));

$$\begin{aligned} f(b) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n \\ &= f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(b-a)^2 \\ &\quad + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n. \end{aligned}$$

[証]

$$F(x) = f(b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k, \quad G(x) = (b-x)^n$$

とおき, コーシーの平均値の定理を適応すれば良い. $F(b) = G(b)\ (= 0)$ に注意.

[別証]

$$R_n = f(b) - \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right),$$

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k + R_n \frac{(b-x)^n}{(b-a)^n}$$

とおくと $\varphi(a) = \varphi(b) = f(b)$ でロルの定理を用いれば

$$^\exists c \in (a, b) \text{ or } (b, a);\ R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n$$

がいえる. ■

系 4 $f(x)$ は $x = a$ を含むある近傍 U で n 回微分可能とすると $^\forall x \in U$, $^\exists \theta = \theta(a, x, n) \in (0, 1)$;

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(a + \theta(x-a))}{n!}(x-a)^n.$$

さらに $f(x)$ が C^∞ で**剰余項**

$$R_n(x) := \frac{f^{(n)}(a + \theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$$

が $n \to \infty$ のとき $R_n(x) \to 0$ となるとき

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

を**テイラー展開**といい, 特に $a = 0$ のとき**マクローリン展開**ともいう

テイラー (マクローリン) 展開の例

$(e^x)^{(n)} = e^x$ より

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad (\text{剰余項 } \frac{e^{\theta x}}{n!}x^n).$$

$(\sin x)^{(n)} = \sin(x + n\pi/2)$ より

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \quad (\text{剰余項 } \frac{\sin(\theta x + n\pi/2)}{n!} x^n).$$

$(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n\pi/2)$ より

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \quad (\text{剰余項 } \frac{\cos(\theta x + n\pi/2)}{n!} x^n).$$

$x > -1$ に対して $(\log(1+x))^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}$ より

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots \quad (\text{剰余項 } \frac{(-1)^{n-1}(1+\theta x)^{-n}}{n} x^n).$$

$a \in \mathbf{R}$ に対し $((1+x)^a)^{(n)} = a(a-1)\cdots(a-n+1)(1+x)^{a-n}$ より $\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}$ として

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!} x^2 + \cdots \quad (\text{剰余項 } \binom{a}{n} (1+\theta x)^{a-n} x^n).$$

[ワンポイントアドバイス] 上の結果を覚えておけば, ロピタルを使わなくても次のようなことがすぐ分る:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \ \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}, \ \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - x}{x^2} = -\frac{1}{2}, \ \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

さらに e の近似値の話と無理数であることを注意.

$$^{\exists}\theta \in (0,1); 0 < e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = \frac{e^\theta}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!} \to 0 \ (n \to \infty).$$

もし e が有理数だとすると $e = m/n$ ($^{\exists}m, n \in \mathbf{Z}$). $n! \cdot e^\theta/(n+1)! = e^\theta/(n+1)$ は正の整数. よって $1 \le e^\theta/(n+1) < 3/(n+1) \to 3 > n+1 \to n = 1 \to e \in \mathbf{Z}$. これは $2 < e < 3$ に矛盾.

2.3 微分法の応用 (Applications of Differential Calculus)

定理 29 関数 $f(x)$ は区間 $[a,b]$ で連続, (a,b) で可微分とする. $f' \ge 0$ (≤ 0) on (a,b) なら $f \uparrow$ $(\downarrow)$ on $[a,b]$. 等号がつかなければ狭義増加 (狭義減少) となる.

[証] 平均値の定理より明らか. ■

例 2 上の定理を用いて次が分かる (差を考えて, 微分してみればよい).

(1) $x > 0$ なら $x - \frac{x^3}{3!} < \sin x < x$ (2) $x \ne 0$ なら $1 - \frac{x^2}{2!} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$

(3) $x > 0$ なら $x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x) < x$

注意 2 $f'(x)$ が連続でない場合, 即ち C^1 級でない場合, 1 点で $f'(a) > 0$ でも, a の近くで増加とは限らない. $f(x) = x + 3x^2 \sin(1/x)$ $(x \ne 0), = 0$ $(x = 0)$ は $f'(0) = 1$ だが 0 の近くで無限に増減を繰り返す. しかし, 次は成り立つ.

定理 30 a の近くで $f(x)$ は C^1 級とする. $f'(a) > 0$ (< 0) なら $x = a$ の近くで $f(x)$ は狭義増加 (狭義減少).

$f'(x)$ が $x = a$ で連続であるから $x = a$ の近くで $f' > 0$ となるから.

定理 31 a の近くで $f(x)$ は C^2 級とする. $f'(a) = 0$, $f''(a) > 0$ (< 0) なら $x = a$ で $f(x)$ は極小 (極大).

テイラーの定理を用いると $f(x) - f(a) = f''(a + \theta(x-a))x^2/2$ $({}^\exists\theta \in (0,1))$ で C^2 級より a の近くで f'' は連続で $f'' > 0$ となり, f' は狭義増加. 後は増減表を考えれば明らか.

関数のグラフが下に凸のとき, その関数を単に**凸関数** という. 正確には, ある区間 I で定義された関数 $f(x)$ が**凸 (下に凸)** であるとは ${}^\forall x, y \in I, {}^\forall p, q \geq 0; p + q = 1$, $f(px + qy) \leq pf(x) + qf(y)$ をみたすときをいう

上で $x = y$ のときのみ等号が成り立つなら **狭義に凸 (下に凸)** であるという. また不等号が逆のときは, それぞれちゃんと**上に凸**, **狭義に上に凸**という.

定理 32 区間 I で定義された関数 $f(x)$ が凸なら ${}^\forall n \geq 2$, ${}^\forall x_1, \ldots, x_n \in I$, ${}^\forall p_1, \ldots, p_n \geq 0; p_1 + \cdots + p_n = 1$, $f(p_1x_1 + \cdots + p_nx_n) \leq p_1f(x_1) + \cdots + p_nf(x_n)$.

帰納法により容易に示せる.

定理 33 区間 I で $f(x)$ は C^2 級とする. $f'' > 0$ on $I \iff f$ は狭義凸 on I.

例 3 (相加相乗平均不等式) $-\log x$ は狭義凸 on $(0, \infty)$.
$x_i > 0$ に対し, $-\log \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \leq -\dfrac{1}{n}(\log x_1 + \cdots + \log x_n)$ より

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}.$$

問 2.3 $a > 1$ のとき $x_k \geq 0$ $(k = 1, \ldots, n)$ に対して次の不等式が成り立つことを示せ:

$$(x_1 + \cdots + x_n)^a \leq n^{a-1}(x_1^a + \cdots + x_n^a).$$

(最後に時間があれば, ニュートンの方法について図で説明.)

テイラーの定理は良く用いられるが, それより弱い条件でも次の結果が成り立つ.

定理 34 ${}^\exists a \in \mathbf{R}$ の近傍で定義された関数 f に対し, ${}^\exists n \geq 1$;

$${}^\exists f^{(n)}(a) \quad \Longrightarrow \quad f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + o(h^n),$$

即ち,

$$\frac{1}{h^n}\left(f(a+h) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k\right) \to 0 \ (h \to 0).$$

特に, $a = 0$ なら,

$${}^\exists f^{(n)}(0) \quad \Longrightarrow \quad f(h) = f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)}{2}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}h^n + o(h^n).$$

また, $n = 2$ で, h を $-h$ に置き換えたものも考えることにより, 次も成り立つ.

$$[\text{対称差}] \quad \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2} \to f''(a) \ (h \to 0)$$

証明 簡単のため, $a=0$ のときを示す. $\varphi(h) := f(h) - f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)}{2}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}h^n = o(h^n)$, 即ち, $\varphi(h)/h^n \to 0$ $(h \to 0)$ を示せば良い. まず, f が 0 で連続なので, $h \to 0$ のとき, $\varphi(h) \to 0$ で, 示すべき式の左辺は, 不定形となり, ロピタルの定理が使える. 同様にして, $f^{(n-1)}$ も 0 で連続なので, $n-1$ 回, ロピタルが使えて, 結局,

$$\frac{\varphi(h)}{h^n} \sim \frac{1}{n!}\left\{\frac{f^{(n-1)}(h) - f^{(n-1)}(0)}{h} - f^{(n)}(0)\right\} \to 0 \quad (h \to 0).$$

■

3 1 変数関数の積分 (Integrals of Functions)

3.1 積分法 (Integral Calculus)

「積分」とは何かといわれると, 「微分の逆」と答えるかもしれないが, それは厳密には**「不定積分」**のことで, 別に**「定積分」**という概念があり, 定義は異なるが結果として本質的に同じであることが分かる. (→**「微分積分学の基本定理」**)

[不定積分の定義]

区間 $[a,b]$ 上で定義された微分可能な関数 $F(x)$ に対して, $F'(x)=f(x)$ の積分 (**不定積分**) を

$$\int f(x)dx := F(x)+C \qquad (\text{これを}\textbf{原始関数}\text{という. } C \text{ は積分定数})$$

と定義する.

次のような公式は簡単に確かめられる. (但し, 積分定数は省略する).

$$\int \log|x|dx = x\log|x| - x, \qquad \int \tan(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\log|\cos(ax+b)| \ (a\neq 0),$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \log|x+\sqrt{x^2+a}| \ (a\neq 0), \qquad \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| \ (a\neq 0),$$
$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} \ (a>0), \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a} \ (a>0).$$

問 3.1 微分することにより上の公式を確かめよ.

また次のような結果も微分すれば明らかである:

定理 35 積分定数は省略する.

(1) a,b 定数に対し,

$$\int [af(x)+bg(x)]dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx.$$

(2) $\phi'(t)$ が連続のとき, $x=g(t)$ とおくと

$$\int f(x)dx = \int f(\phi(t))\phi'(t)dt.$$

更に具体的に値を求める計算などでは $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$ を用いればよいが, 実はこれは**定積分**という概念の定義から導かれる結果 (定理) で, その流れで不定積分を初めに述べたように微分の逆と定義する. 元々, (定) 積分は「ある区間上の関数のグラフの x 軸との間の面積を求める」という発想から生まれている.

定積分の定義

$f(x)$ を区間 $I=[a,b]$ 上の有界関数とする, i.e., $m\le f(x)\le M$. I の分割 $\Delta : a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ に対し, $|\Delta|=\max\{x_k-x_{k-1}; k=1,\ldots,n\}$ とする. 各 $k=1,\ldots,n$ について $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$ を任意にとり, 和

$$R(\Delta;\{\xi_k\}) := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1}) \quad (\textbf{Riemann 和})$$

を考える.

今, 分割 Δ をどんどん細かくしていったとき, $R(\Delta;\{\xi_k\})$ が Δ と $\{\xi_k\}$ の選び方によらずに一定の値に近づくとき, $f(x)$ は $I=[a,b]$ 上で **(Riemann) 積分可能** (or **可積**) であるといい, その極限を $f(x)$ の $I=[a,b]$ 上の**定積分**と呼び, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ と表す.

$$
{}^\exists\alpha\in\mathbf{R};\ {}^\forall\Delta=\{[x_{k-1},x_k]\}_{k=1}^n; I \text{ の分割}, {}^\forall\xi_k\in[x_{k-1},x_k]\ (k=1,\dots,n),
$$
$$
\alpha=\lim_{|\Delta|\to 0}R(\Delta;\{\xi_k\})\ \left(=:\int_a^b f(x)dx\right).
$$

例 4 $I=[0,1]$ 上の関数 $f(x)$ で, 有理数で 0, 無理数で 1 なるものは Riemann 積分不可能である. 実際, どんな分割の小区間 $[x_{k-1},x_k]$ にも有理数と無理数は無数にあるから ξ_k として無理数のみをもってくれば Riemann 和は常に 1 で, 逆に有理数のみをもってくれば 0 となるから.

今, $M_k=\sup_{[x_{k-1},x_k]}f$, $m_k=\inf_{[x_{k-1},x_k]}f$ に対して (分割 Δ に対する) **上限和**, **下限和** を

$$
S(\Delta)=\sum_{k=1}^n M_k(x_k-x_{k-1}),\quad s(\Delta)=\sum_{k=1}^n m_k(x_k-x_{k-1})
$$

とおき, 更に **上積分**, **下積分** を

$$
S=\inf_{\Delta}S(\Delta),\quad s=\inf_{\Delta}s(\Delta)
$$

と定義すると

$$
m(b-a)\le s(\Delta)\le s\le S\le S(\Delta)\le M(b-a)
$$

が成り立つ. 実際, 真ん中の不等式については任意の 2 つの分割 Δ_1,Δ_2 に対して, 共通の分割 $\Delta=\Delta_1\cap\Delta_2$ を考えると, それぞれの細分となっているから $s(\Delta_1)\le s(\Delta)\le S(\Delta)\le S(\Delta_2)$.

$$
{}^\forall\text{分割 } \Delta_1,\Delta_2,\quad s(\Delta_1)\le S(\Delta_2).
$$

従って両辺に $\inf_{\Delta_1}$, $\sup_{\Delta_2}$ を施せばよい.

(以下で示すように, 上の積分の定義と同値な定義として, $S=s$ のときに Riemann 積分可能とする仕方もある. 教科書ではそうなっていて, こちらの方が直感的に理解しやすい.)

定理 36 (ダルブーの定理) $f(x)$ を閉区間 I 上の有界関数とすると, $|\Delta|\to 0$ のとき, $S(\Delta)\to S$, $s(\Delta)\to s$.

証明 $S(\Delta)$ についてのみ示す ($s(\Delta)$ についても同様である). $M=\sup_I|f|$ として, 任意に $\varepsilon>0$ を固定する. S の定義より,

$$
{}^\exists\text{分割 } \Delta_\varepsilon;\quad S(\Delta_\varepsilon)<S+\varepsilon.
$$

この Δ_ε の分点の個数を K, 各小区間の最小幅を δ とする. このとき

$$
{}^\forall\text{分割 } \Delta; |\Delta|<\delta\wedge\frac{\varepsilon}{2KM},\quad S(\Delta)-S<2\varepsilon
$$

が成り立つことを示そう (これから $|\Delta|\to 0$ のとき $S(\Delta)\to S$ をえる).

$\Delta = \{\Delta x_k = [x_{k-1}, x_k]\}$, 共通の分割 $\Delta \cap \Delta_\varepsilon = \{\Delta y_j = [y_{j-1}, y_j]\}$ として

$$S(\Delta) - S(\Delta \cap \Delta_\varepsilon) = \sum_k \sup_{\Delta x_k} f \cdot |\Delta x_k| - \sum_j \sup_{\Delta y_j} f \cdot |\Delta y_j|$$

を考える. $|\Delta| < \delta$ より, Δ の各小区間 $[x_{k-1}, x_k]$ はその内部 (x_{k-1}, x_k) に Δ_ε の分点を高々 1 個含む. Δ_ε の分点を 1 個含むとき $[x_{k-1}, x_k] = [y_{j-1}, y_{j+1}]$ で $|\Delta x_k| = |\Delta y_j| + |\Delta y_{j+1}|$ と $\sup_{\Delta y_j} f, \sup_{\Delta y_{j+1}} \le \sup_{\Delta x_k} f \le M$ に注意して,

$$\sup_{\Delta x_k} f \cdot |\Delta x_k| - (\sup_{\Delta y_j} f \cdot |\Delta y_j| + \sup_{\Delta y_{j+1}} f \cdot |\Delta y_{j+1}|) \le 2M|\Delta \cap \Delta_\varepsilon| \le 2M|\Delta|.$$

また分点を含まないときは $[x_{k-1}, x_k] = [y_{j-1}, y_j]$ となるので,

$$S(\Delta) - S(\Delta \cap \Delta_\varepsilon) \le 2KM|\Delta| < \varepsilon.$$

また

$$S(\Delta \cap \Delta_\varepsilon) - S \le S(\Delta_\varepsilon) - S < \varepsilon$$

から, 求める結果をえる. ■

問 3.2 $s(\Delta) \to s$ の証明をせよ.

系 5 区間 I 上の有界関数 $f(x)$ が Riemann 積分可能
$\iff S = s$
$\iff 0 \le S(\Delta) - s(\Delta) \to 0 \ (|\Delta| \to 0)$.

証明 $s = S$ なら $s(\Delta) \le R(\Delta; \{\xi_k\}) \le S(\Delta)$ とダルブーの定理より $R(\Delta; \{\xi_k\}) \to S = s$ $(|\Delta| \to 0)$ で Riemann 積分可能. 逆は $^\forall \varepsilon > 0$ を固定する. $^\forall \Delta = \{[x_{k-1}, x_k]\}_{k=1}^n$ 分割をとると, 各 $k = 1, \ldots, n$ に対し,

$$^\exists \xi_k, \xi_k' \in [x_{k-1}, x_k];\ f(\xi_k) < m_k + \frac{\varepsilon}{b-a},\ M_k - \frac{\varepsilon}{b-a} < f(\xi_k').$$

よって

$$R(\Delta; \{\xi_k\}) < s(\Delta) + \varepsilon, \quad S(\Delta) - \varepsilon < R(\Delta; \{\xi_k'\}).$$

Riemann 積分可能なら $|\Delta| \to 0$ とすると,

$$\int_a^b f(x)dx \le s + \varepsilon, \quad S - \varepsilon \le \int_a^b f(x)dx.$$

$\varepsilon > 0$ 任意より, $\varepsilon \downarrow 0$ として,

$$\int_a^b f(x)dx \le s \le S \le \int_a^b f(x)dx.$$

即ち, $s = S = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$. 後半は前半のこととダルブーの定理より明らか. ■

例 5 区間 $[a, b]$ 上の単調関数 $f(x)$ は Riemann 積分可能である.

証明 単調増加のときを考えると次から明らか.

$$S(\Delta) - s(\Delta) \le (f(b) - f(a))|\Delta| \to 0 \quad (|\Delta| \to 0).$$

■

例 6 区間 $[a, b]$ 上の連続関数 $f(x)$ は Riemann 積分可能である.

証明 $f(x)$ は $I = [a, b]$ 上で一様連続であるから,

$$^\forall\varepsilon > 0, {}^\exists\delta > 0; {}^\forall x, y \in I; |x - y| < \delta, |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

よって $|\Delta| < \delta$ なる分割 Δ に対して, $M_k - m_k \le \varepsilon$. これから

$$S - s \le S(\Delta) - s(\Delta) \le \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) \le \varepsilon \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = \varepsilon(b - a).$$

$\varepsilon \to 0$ として $S = s$ をえる. ■

例 7 $f(x)$ が $[a, b]$ で連続なら,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k}{n}(b - a)\right) = \int_a^b f(x)dx.$$

特に $[a, b] = [0, 1]$ なら,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx.$$

定理 37 $F'(x) = f(x)$; $[a, b]$ で連続のとき $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ $(= [F(x)]_a^b$ とも表す).

後にこれの逆も示す. 即ち, $F(x) = \int_a^x f(u)du$ なら $F'(x) = f(x)$ (これらを**微分積分学の基本定理**という).

[証] 分割 $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ に対して, 平均値の定理より,

$$x_{k-1} < {}^\exists\xi_k < x_k; \quad F(x_k) - F(x_{k-1}) = f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

よって

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = R(\Delta; \{\xi_k\}) \to \int_a^b f(x)dx \quad (|\Delta| \to 0).$$

■

例題 1 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2}$ を求めよ.

[解] $$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + (k/n)^2} \to \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}dx = [\tan^{-1} x]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

問 3.3 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{n}{n^2 + k^2}$ を求めよ. $[\tan^{-1} 2]$

3.2 積分の性質 (Properties of Integrals)

定積分の性質 (線型性, 加法性, 単調性, 微分積分学の基本定理) を述べる.

定理 38 $f(x)$ が $[a,b]$ で可積分なら $^\forall[c,d] \subset [a,b]$ でも可積分.

[証] $[c,d]$ の分割を Δ, $[a,b] \setminus [c,d]$ の分割を Δ' とし, それを合わせた $[a,b]$ の分割を Δ'' で表すことにする. $0 \le S(\Delta) - s(\Delta) \le S(\Delta'') - s(\Delta'')$. $|\Delta| \to 0$ のとき, 同時に $|\Delta'| \to 0$ となるようにとれば $|\Delta''| \to 0$ となるので, このとき上式右辺 $\to 0$ となり, 結局 $S(\Delta) - s(\Delta) \to 0$ $(|\Delta| \to 0)$ をえて, 求める結果をえる. ■

定理 39 $[a,b]$ で $f(x), g(x)$ は積分可能とする.

(1) **線形性** $\displaystyle\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$ (α, β は定数).

(2) **区間加法性** $^\forall c \in [a,b]$ に対し, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$

(3) **単調性** $f(x) \ge 0$ なら $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \ge 0.$ また $f(x) \le g(x)$ なら $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$

(4) **絶対可積分性** $|f(x)|$ も可積分で, $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$

[証] (1) 積分の定義 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ $(\Delta = \{[x_{k-1}, x_k]\}_{k=1}^n, \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, \dots, n))$ より明らか (和と極限の線形性より).

(2) $a < c < b$ のときを考えれば十分で, これも前の定理と積分の定義から明らか.

(3) 前半は積分の定義より明らかで, 後半は $f - g \ge 0$ について前半のことと (1) より成り立つ.

(4) $-|f| \le f \le |f|$ に (3) を適用すればよい. ■

定理 40 $f(x)$ が $[a,b]$ で連続で, $f(x) \ge 0$ とする. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0$ なら $f(x) = 0$ $(^\forall x \in [a,b])$.

[証] 対偶を示せばよい. もし $^\exists x_0 \in [a,b]; f(x_0) > 0$ とすると, 連続性から $^\exists\delta > 0; f(x) \ge f(x_0)/2 (=: m$ とおく.) for $^\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap [a,b]$. 従って
$\displaystyle\int_a^b f(x)dx \ge m\,|[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap [a,b]| = m\,\{(b \vee (x_0 + \delta)) - (a \wedge (x_0 - \delta))\} > 0$ をえる. ■

定理 41 (積分の平均値の定理) $f(x)$ を $[a,b]$ で連続とする.

$$^\exists c \in (a,b); \quad \int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

[証] f が定数なら明らか. 定数でないとき, f の最大値, 最小値をそれぞれ M, m とすると前定理より $\displaystyle m < \int_a^b f(x)dx/(b-a) < M$. よって中間値の定理より, $^\exists c \in (a,b); f(c) = \int_a^b f(x)dx/(b-a)$.
■

定理 42 (微分積分学の基本定理) $f(x)$ を $[a,b]$ で連続とする.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \quad ({}^\forall x \in (a,b)).$$

[証] $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ とおくと区間加法性と平均値の定理より,

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt = f(c)h$$

をみたす c が x と $x+h$ の間にある. これから明らかに

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x).$$

■

これと前の定理 37 $F'(x) = f(x)$; $[a,b]$ で連続のとき $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ を併せて, **微分積分学の基本定理**という.

定理 43 (置換積分法) $f(x)$ は $[a,b]$ で連続, $\varphi(t)$ は $[\alpha,\beta]$ or $[\beta,\alpha]$ で C^1 級; $a \le \varphi(t) \le b, \varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$ とすると

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

[証] 前の証明と同じ $F(x)$ に対し, $(F(\varphi(t)))' = f(\varphi(t))\varphi'(t)$ であるから定理 37 より成り立つ. 両辺に $\displaystyle\int_\alpha^\beta dt$ を施せば, (左辺) $= F(b) - F(a) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) =$ (右辺) を得る. ■

定理 44 (部分積分法) $f(x), g(x)$ が $[a,b]$ で C^1 級のとき,

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

[証] $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ で定理 37 より成り立つ. ■

例 8 $\displaystyle\int_0^{3\pi/2}\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx$ を求めよ. $t = \sin x \to dt = \cos x dx \to -\pi/4$

例 9 $f(x)$ を $[-a,a]$ で連続とする.

$f(x)$ 偶関数; $f(-x) = f(x)$ なら $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$

$f(x)$ 奇関数; $f(-x) = -f(x)$ なら $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)dx = 0.$

例 10 $n \ge 1$ に対し,

$$\int_a^{\pi/2}\sin^{2n} x dx = \int_a^{\pi/2}\cos^{2n} x dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot 2n}\frac{\pi}{2}$$

$$\int_a^{\pi/2}\sin^{2n+1} x dx = \int_a^{\pi/2}\cos^{2n+1} x dx = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n+1)}$$

3.3 不定積分の計算法

[漸化式] (部分積分を用いた計算)

$$\begin{aligned}
\int \cos^n x dx &= \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x dx \\
\int \sin^n x dx &= -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x dx \\
\int \tan^n x dx &= \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x dx \quad (n \geq 2) \\
\int (\log x)^n dx &= x(\log x)^n - n\int (\log x)^{n-1} dx \quad (n \geq 1)
\end{aligned}$$

問 3.4 部分積分により, 上の公式を確かめよ.

[有理関数の積分] 有理関数 $f(x) = P(x)/Q(x)$ は次のように分解される. 但し, $P(x)$, $Q(x)$ は多項式で, (P の次数) $<$ (Q の次数) をみたし, さらに

$$Q(x) = \alpha \prod_{i=1}^{k}(x-a_i)^{m_i} \prod_{j=1}^{\ell}(x^2+b_jx+c_j)^{n_j} \quad (b_j - 4c_j < 0).$$

このとき

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{s=1}^{m_i}\frac{A_{i,s}}{(x-a_i)^s} + \sum_{j=1}^{\ell}\sum_{t=1}^{n_j}\frac{B_{j,t}x + C_{j,t}}{(x^2+b_jx+c_j)^t} \quad (\text{部分分数分解})$$

これの積分は次の積分に帰着する (何故か説明せよ.):

- $I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+a)^n}$ なら $I_n = \dfrac{1}{2(n-1)a(x^2+a)^{n-1}} + \dfrac{2n-3}{2(n-1)a} I_{n-1} \quad (n \geq 2, a \neq 0).$

例題 2 $\displaystyle\int \frac{2}{(x+1)^2(x^2+1)} dx$ を求めよ. $\left(\log|x+1| - \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{2}\log(x^2+1)\right)$

問 3.5 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+1} dx$ を求めよ. $\left(\dfrac{1}{3}\log|x+1| - \dfrac{1}{6}\log(x^2-x+1) + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$

[合成関数の積分] 有理関数と初等関数の合成関数を考える. $R(t), R(x,y)$ 有理関数とする.

- $\displaystyle\int R(e^x)dx = \int \frac{R(t)}{t}dt \quad \left(e^x = t \to dx = \frac{1}{t}dt\right).$

- $\displaystyle\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt \quad \left(\tan\frac{x}{2} = t\right).$

特に $\sin^2 x, \cos^2 x, \tan x$ の有理式のとき

- $\displaystyle\int R\left(\sin^2 x, \cos^2 x, \tan x\right)dx = \int R\left(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}, t\right)\frac{dt}{1+t^2} \quad (\tan x = t).$

例題 3 $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos x}$ を求めよ. $\left(\tan\dfrac{x}{2}\right)$

問 3.6 $\displaystyle\int \frac{dx}{2+e^x}$ を求めよ. $\left(\dfrac{1}{2}(x - \log(e^x+2))\right)$

[無理関数の積分]

$$\cdot\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx=\int R\left(\frac{dt^n-b}{a-ct^n},t\right)\frac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(a-ct^n)^2}dt\qquad\left(\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}=t\right).$$

但し, $ad-bc\neq 0, n\geq 2$.

・$R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$ について

$a>0$ なら $\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}x$ として $x=\dfrac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b},\quad dx=\dfrac{2(\sqrt{a}t^2+bt+\sqrt{a}c)}{2\sqrt{a}t+b)^2}dt.$

$a<0$ のとき異実解 $\alpha<\beta$ をもつとしてよいから (重解, 虚解なら常に $ax^2+bx+c\leq 0$ となるから)

$$\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}}=t \text{ として } \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{-a}(\beta-\alpha)t}{1+t^2},\ x=\frac{\alpha+\beta t^2}{1+t^2},\quad dx=\frac{2(\beta-\alpha)t}{(1+t^2)^2}dt.$$

その他に高校 (予備校？) でも習うように

$\sqrt{a^2-x^2}$ なら $x=a\sin t$ ($|t|\leq\pi/2$) で $\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t,\ dx=a\cos t dt.$

$\sqrt{x^2+a^2}$ なら $x=a\tan t$ ($|t|<\pi/2$) で $\sqrt{x^2+a^2}=a\sec t,\ dx=a\sec^2 t dt.$

$\sqrt{x^2-a^2}$ なら $x=a\sec t$ で $\sqrt{x^2-a^2}=a|\tan t|,\ dx=a\tan t\sec t dt.$

問 上の計算を全て確かめよ.

例題 4 $\displaystyle\int x\sqrt[4]{1-x}dx$ を求めよ. $\left(-\dfrac{4}{45}(5x+4)(1-x)^{5/4}\right)$

問 3.7 $\displaystyle\int x\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}dx$ を求めよ. $\left(\dfrac{1}{4}(2x^2+x-1)\sqrt{\dfrac{x+2}{x+1}}-\dfrac{5}{4}\log(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})\right)$

[まとめの問題]

次の不定積分を求めよ (積分定数は省略してよい).

(1) $\dfrac{x}{(x+1)^2}$ (2) $\dfrac{1}{x^4+1}$ (3) $\dfrac{1}{1+\sin x}$ (4) $\dfrac{1}{3+2\tan x}$ (5) $\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$ (6) $\dfrac{x}{\sqrt{5x-6-x^2}}$

[解]

(1) $\log|x+1|+\dfrac{1}{x+1}$ (2) $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\log\left(\dfrac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}[\tan^{-1}(\sqrt{2}x+1)+\tan^{-1}(\sqrt{2}x-1)]$

(3) $\dfrac{-2}{1+\tan(x/2)}=\tan x-\sec x-1$ (4) $\dfrac{2\log|2\sin x+3\cos x|+3x}{13}$

(5) $2\sqrt{x}-2\log(1+\sqrt{x})$ (6) $5\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{x-2}{3-x}}-\sqrt{5x-6-x^2}\ \left(t=\sqrt{\dfrac{x-2}{3-x}}\right)$.

3.4 積分法の応用 (Applications of Integral Calculus)

$-\infty\leq a<b<\infty$ に対し, 区間 $(a.b]$ で定義されてる関数 $f(x)$ に対し, (a では定義されてなくても良い)

$$\exists\lim_{a'\downarrow\downarrow a}\int_{a'}^b f(x)dx\quad\left(=:\int_a^b f(x)dx\quad \text{と表す.}\right)$$

このとき f は $(a,b]$ で広義積分可能であるといい, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ を**広義積分**という.

厳密には極限がなくても広義積分といい, 存在しているときには**広義積分は収束**しているといい, 存在していないときには**発散**しているという.)

$-\infty < a < b \leq \infty$ に対し, $[a,b)$ のときも同様で, 更に, (a,b) で定義されている関数のときは, $a < c < b$ をとり, $\int_a^c f(x)dx$, $\int_c^b f(x)dx$ 共に広義積分として定義可能なとき, その和を (a,b) 上の広義積分 $\int_a^b f(x)dx$ として定義する.

例 11

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \left[\sqrt{x}\right]_0^1 = 1, \quad \int_0^1 \frac{dx}{x} = [\log x]_0^1 = \infty$$

より, $(0,1]$ で前者は広義積分可能だが, 後者は不可能である.

注 正確には上の計算は

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a \to 0+} \int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a \to 0+} \left[\sqrt{x}\right]_a^1 = \lim_{a \to 0+} (1 - \sqrt{a}) = 1$$

と計算するのだが, 面倒なので上のように省略して計算する.

例題 5

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} 1/(1-\alpha) & (\alpha < 1) \\ \infty & (\alpha \geq 1), \end{cases} \qquad \int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} 1/(\alpha-1) & (\alpha > 1) \\ \infty & (\alpha \leq 1). \end{cases}$$

問 3.8 $\int_2^\infty \frac{dx}{x(\log x)^\alpha}$ を求めよ. $\left[\frac{(\log 2)^{\alpha-1}}{\alpha - 1} \ (\alpha > 1),\ \infty \ (\alpha \leq 1)\right]$

問 3.9 $\int_0^1 \log x dx$ を求めよ. $[-1]$

計算の仕方は普通の定積分のときと同じで, ここでメインの問題となるのは計算の難しい積分についてそれが収束するかどうか, である.

$-\infty \leq a < b \leq \infty$ に対し, $\int_a^b |f(x)|dx < \infty$ のとき, 広義積分 $\int_a^b f(x)dx$ は**絶対収束**しているといい, $\int_a^b |f(x)|dx = \infty$ だが, $\int_a^b f(x)dx$ が存在しているとき, **条件収束**しているという.

定理 45 $-\infty \leq a < b \leq \infty$ と区間 (a,b) or $(a,b]$ or $[a,b)$ 上の関数 $f(x)$ に対し, ${}^\exists\varphi(x); |f(x)| \leq \varphi(x)$, $\int_a^b \varphi(x)dx < \infty$ のとき, $f(x)$ の広義積分は絶対収束する.

[証] 次の不等式から明らか.

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx < \infty.$$

■

問 3.10 (1) $\sin x/x$ が $(0,1]$ で有界であることを説明せよ.

(2) 部分積分により, $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ が収束することを示せ.

(3) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ が条件収束することを示せ.

$$\int_0^{n\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k\pi}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}|\sin x|dx = \sum_{k=1}^n \frac{2}{k\pi} \to \infty.$$

問 3.11　ガンマ関数 $\Gamma(t) := \int_0^\infty e^{-x}x^{t-1}dx\ (t>0)$ が well-defined であることを確かめよ.
[1 で分ける. $\lim_{x\to\infty} e^{-x}x^{t+1}=0$ より $x \geq 1$ では $e^{-x}x^{t-1} \leq Kx^{-2}$]

問 3.12　ベータ関数 $B(p,q) := \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx\ (p,q>0)$ が well-defined であることを確かめよ.
[$0<p<1$ なら $x \leq 1/2$ では $x^{p-1}(1-x)^{q-1} \leq (1 \vee (1/2)^{q-1})x^{p-1}$, $0<q<1$ なら $x \geq 1/2$ では $x^{p-1}(1-x)^{q-1} \leq (1\vee(1/2)^{p-1})(1-x)^{q-1}$]

[曲線の長さ]
曲線 $C:(x,y)=(g(t),h(t))\ (a \leq t \leq b)$ に対し, その長さ l を,

$$l := \sup_{\Delta} L(\Delta)$$

で定義する, 但し, $L(\Delta)$ は $[a,b]$ の分割 $\Delta: a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$ に対する折れ線の長さ;

$$L(\Delta) := \sum_{k=1}^n \sqrt{(g(t_k)-g(t_{k-1}))^2+(h(t_k)-h(t_{k-1}))^2}.$$

定理 46　C^1 級曲線 $C:(x,y)=(g(t),h(t))\ (a\leq t\leq b)$ に対し, その長さ l は次で与えられる:

$$l = \int_a^b \sqrt{g'(t)^2+h'(t)^2}dt.$$

[証]　分割 $\Delta: a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$ に対し, 平均値の定理より, 各 $k=1,2,\ldots,n$ に対し, ${}^\exists\xi_k, {}^\exists\eta_k \in (t_{k-1},t_k)$;

$$\sqrt{(g(t_k)-g(t_{k-1}))^2+(h(t_k)-h(t_{k-1}))^2} = \sqrt{g'(\xi_k)^2+h'(\eta_k)^2}(t_k-t_{k-1}).$$

任意の $\{\tau_k\}; t_{k-1}<\tau_k<t_k$ に対し,

$$|\sqrt{g'(\xi_k)^2+h'(\eta_k)^2}-\sqrt{g'(\tau_k)^2+h'(\tau_k)^2}| \leq |g'(\xi_k)-g'(\tau_k)|+|h'(\eta_k)-h'(\tau_k)|$$

より, Riemann 和 $R(\Delta;\{\tau_k\}) = \sum_{k=1}^n \sqrt{g'(\tau_k)^2+h'(\tau_k)^2}(t_k-t_{k-1})$ を考えると, 次をえる:

$$\lim_{|\Delta|\to 0} L(\Delta) = \lim_{|\Delta|\to 0} R(\Delta) = \int_a^b \sqrt{g'(t)^2+h'(t)^2}dt.$$

実際, 平面上の三角不等式と $\sqrt{a^2+b^2} \leq |a|+|b|$ より,

$$\begin{aligned} |L(\Delta)-R(\Delta)| &\leq \sum_{k=1}^n [|g'(\xi_k)-g'(\tau_k)|+|h'(\eta_k)-h'(\tau_k)|](t_k-t_{k-1}) \\ &\leq S(\Delta,g')-s(\Delta,g')+S(\Delta,h')-s(\Delta,h') \to 0 \quad (|\Delta|\to 0). \end{aligned}$$

従って Δ の任意の細分 $\tilde{\Delta}$ をとると明らかに $L(\Delta) \leq L(\tilde{\Delta})$ となるから,

$$L(\Delta) \leq L(\tilde{\Delta}) \to \int_a^b \sqrt{g'(t)^2 + h'(t)^2}dt \quad (|\tilde{\Delta}| \to 0).$$

即ち, 任意の分割 Δ に対し, $L(\Delta) \leq \displaystyle\int_a^b \sqrt{g'(t)^2 + h'(t)^2}dt$. よって

$$l = \sup_{\Delta} L(\Delta) \leq \int_a^b \sqrt{g'(t)^2 + h'(t)^2}dt.$$

また次から逆の不等式もえられる:

$$l \geq L(\Delta) \to \int_a^b \sqrt{g'(t)^2 + h'(t)^2}dt \quad (|\Delta| \to 0).$$

■

系 6 C^1 級曲線 C が $y = f(x)$ $(a \leq x \leq b)$ で与えられるなら, その長さ l は

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}dx.$$

系 7 曲線 C が極座標表示 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ により, C^1 級関数 $r(\theta)$ により, $r = r(\theta)$ $(\alpha \leq \theta \leq \beta)$ で与えられるとき, その長さ l は

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2}d\theta.$$

[証] $g(\theta) = r(\theta)\cos\theta, h(\theta) = r(\theta)\sin\theta$ より, $g' = r'\cos\theta - r\sin\theta, h' = r'\sin\theta + r\cos\theta$ より, $g'^2 + h'^2 = r^2 + r'^2$ をえる. ■

4 無限級数と微分・積分 (Infinite Series and Differential-Integral)

4.1 無限級数 (Infinite Series)

前期で少し述べたように, 無限和 (**無限級数**) というものは次のように定義される:
数列 $\{a_n\}$ に対し,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n \quad \text{(if exists)}.$$

特に $a_n \geq 0$ のとき, **正項級数**という. (厳密には上の極限が存在していなくても, 形式的に, 無限和 $\sum a_n$ を級数といい, 極限が存在するときは収束するといい, 存在しないときは発散するという.)

更に, 級数 $\sum a_n$ に対し, $\sum |a_n| < \infty$ のとき, **絶対収束**しているといい, $\sum |a_n| = \infty$ だが, $^\exists \sum a_n$ のとき, **条件収束**しているという.

無限級数の最も簡単な収束・発散の判定条件は次である:

命題 4 $\lim a_n \neq 0$ なら $\sum a_n$ は発散. ($\sum a_n$ が収束していれば $\lim a_n = 0$.)

(部分和 $S_n = \sum_{k=1}^n a_n$ に対し, $S_n \to {}^\exists S \in \mathbf{R}$ なら $a_n = S_n - S_{n-1} \to S - S = 0$ より明らか.)

また等比数列 $a_n = ar^{n-1}$ に関しては高校で習ったように, $|r| < 1$ なら $\sum a_n = a/(1-r)$, $|r| \geq 1$ なら発散する.

定理 47 $\rho := \lim |a_{n+1}/a_n|$ or $\lim \sqrt[n]{a_n}$ (if exists) とする. $0 \le \rho < 1 \Rightarrow \sum a_n$ は (絶対) 収束, $\rho > 1 \Rightarrow \sum |a_n| = \infty$, i.e., $\sum a_n$ は発散.

この定理は等比数列との比較で容易に示されるが,
[$^\forall\varepsilon > 0, {}^\exists N; {}^\forall n \ge N, ||a_{n+1}/a_n| - \rho| < \varepsilon$, i.e., $\rho - \varepsilon < |a_{n+1}/a_n| < \rho + \varepsilon$.
(1) $\rho < \rho_0 < 1$ なら $\rho + \varepsilon = \rho_0$, i.e., $\varepsilon = \rho_0 - \rho$ ととると $|a_{n+1}| < \rho_0 |a_n| < \rho_0^{n-N} |a_N|$.
(2) $1 < \rho_1 < \rho$ なら $\rho - \varepsilon = \rho_1$, i.e., $\varepsilon = \rho - \rho_1$ ととると $|a_{n+1}| > \rho_1 |a_n| > \rho_1^{n-N} |a_N|$.]
$\rho = 1$ のときには判定できない. しかし定積分を用いると次のようなことは簡単に分かる.

問 4.1 定積分を用いて (1) $\displaystyle\sum_{n\ge1} \frac{1}{n^p}$ (2) $\displaystyle\sum_{n\ge2} \frac{1}{n(\log n)^p}$ は $p > 1$ なら収束, $p \le 1$ なら発散を示せ.
[$\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}, \int_2^\infty \frac{dx}{x(\log x)^p}$ と比較 ($f(x) = \displaystyle\frac{1}{x(\log x)^p}$ $(p > 0)$ は $x > 1$ なら単調減少).]
$a_n > 0$ に対し, $\sum (-1)^{n-1} a_n$ を**交代級数**という.

定理 48 (ライプニッツの交代級数定理) $a_n \downarrow 0$ なら, 交代級数 $\sum (-1)^{n-1} a_n$ は収束する.

[証] 部分和 $S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{n-1} a_n$ に対し, S_{2n-1} と S_{2n} を考える. $a_n \downarrow 0$ より

$$S_2 \le S_{2n} \uparrow, \ \le S_{2n-1} \downarrow, \ \le S_1 \ (= a_1).$$

(実際, $\sum (-1)^{n-1} a_n = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots$ より分かる.)
単調な有界列が収束することと $0 \le S_{2n-1} - S_{2n} = a_{2n} \to 0$ より, これらは同じ値に収束する. ■

例 12 $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n}$ は条件収束する.

定理 49 (正項級数の順序交換可能定理) 正項級数はその和の順序を入れ換えても, 収束・発散は変わらず, 収束のときは同じ値に収束する.

[証] $\sum a_n$ を正項級数とし, $\sum a'_n$ をその順序を入れ換えた正項級数とする. またそれぞれの部分和を S_n, S'_n として極限を S, S' $(\le \infty)$ とする. $n \ge 1$ に対し, S'_n の中に含まれる元の $\{a_k\}$ の最大番号を m とすると $n \le m$ で $S'_n \le S_m \uparrow S$. よって $S' \le S$. 逆に考えて $S \le S'$ で $S = S'$.
(正確には $S < \infty$ なら, 有界な単調列が収束することから $S' \le S$. 逆に考えて $S \le S'$. $S = \infty$ のときは, もし $S' < \infty$ とすると 上の議論の逆より, $S \le S' < \infty$ となり矛盾する. ゆえに $S = S' = \infty$.) ■

定理 50 (積級数) $\sum a_n, \sum b_n$ が絶対収束しているとすると, $c_n = \sum_{j+k=n} a_j b_k$ に対し, $\sum c_n$ (**積級数**という) も絶対収束し, $\sum c_n = \sum a_n \sum b_n$.

[証] $\sum a_n, \sum b_n, \sum c_n$ の部分和をそれぞれ A_n, B_n, C_n とする.
(1) $\sum a_n, \sum b_n$ 共に正項級数のとき.
$C_n \le A_n B_n \le C_{2n}$ が成り立つことに注意すれば, 容易に分かる.
(2) 一般のとき.
$a'_n = |a_n|, b'_n = |b_n|, c'_n = \sum_{j+k=n} |a_j b_k|$ とし, 部分和をそれぞれ A'_n, B'_n, C'_n とおくと, 上のことから, $\sum c'_n = \sum |a_n| \sum |b_n|$ で, $|c_n| \le c'_n$ より, $\sum |c_n| < \infty$. また $|C_n - A_n B_n| \le A'_n B'_n - C'_n \to 0$ より $\sum c_n = \sum a_n \sum b_n$ も成り立つ. ■

4.2 関数列と関数項級数 (Sequence of Function and Series of Function)

区間 I で定義された関数列 $f_n(x)$ に対し,

- **各点収束** $f_n \to f$ on $I \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} {}^\forall x \in I, f_n(x) \to f(x)$

  $\Longleftrightarrow {}^\forall x \in I, {}^\forall \varepsilon > 0, {}^\exists N = N(x,\varepsilon) \geq 1; {}^\forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$

- **一様収束** $f_n \rightrightarrows f$ on $I \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \to 0$

  $\Longleftrightarrow {}^\forall \varepsilon > 0, {}^\exists N = N(\varepsilon) \geq 1; {}^\forall n \geq N, {}^\forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$

例 13 $I = [0,1]$ として $n \geq 1$ に対し, $y = f_n(x)$ を 4 点 $(0,0), (1/(2n), 2n), (1/n, 0), (1,0)$ を線分で結んだグラフをもつ関数とすると, $f_n \to 0$ だが $f_n \not\rightrightarrows 0$ となる.

問 4.2 f_n が f に I で一様収束しないという命題を述べよ.

$n = 1, 2, \ldots$ に対し, $f_n(x) = \dfrac{1-x^n}{1-x}$ on $(-1,1)$ を考えると, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \dfrac{1}{1-x}$ (各点収束) で, $0 < {}^\forall a < 1$ に対し, $[-a, a]$ 上で一様収束だが, $(-1,1)$ 上では一様収束はいえない. (このとき f_n は $(-1,1)$ 上で**広義一様収束**しているという.)

問 4.3 上のことを確かめよ.

$g_n := f(x) - f_n(x) = x^n/(1-x)$ で, $|x| \leq a < 1$ なら $|g_n(x)| \leq a^n/(1-a) \to 0$ $(n \to \infty)$. $|x| < 1$ のときは, $g_n(x) \to \infty$ $(x \upuparrows 1)$ より. 一様にはならない.

定理 51 連続関数列の一様収束極限は連続; [区間 I で f_n: conti., かつ $f_n \rightrightarrows f$ ならば f: conti.]
(対偶をいえば, 連続関数列の極限関数が連続でなければ, その収束は一様収束ではない.
もちろん, 逆は一般に成り立たない. $\to$ 例 13.)

[証] ${}^\forall x_0, x \in I, {}^\forall n \geq 1,$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \leq 2\|f - f_n\|_\infty + |f_n(x) - f_n(x_0)|$$

より, 先に, $x \to x_0$ としてから, $n \to \infty$ とすれば良い. 実際, $\lim_{x\to x_0} |f(x) - f(x_0)| \leq 2\|f - f_n\|_\infty \to 0$ $(n \to \infty)$.

もっと厳密に, ε-δ 論法でやるなら, ${}^\forall x_0 \in I, {}^\forall \varepsilon > 0$ をとる. $f_n \rightrightarrows f$ on I より, ${}^\exists n_0; |f_{n_0}(x) - f(x)| < \varepsilon/3$ $({}^\forall x \in I)$. 更に f_{n_0} 連続より, ${}^\exists \delta > 0; {}^\forall x \in I; |x - x_0| < \delta, |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \varepsilon/3$.
よって $|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$. ■

定理 52 (積分・極限交換可能定理) 有界閉区間上の連続関数列が一様収束していれば, 積分と極限の交換可能.

$I = [a,b]$ で f_n: conti., かつ $f_n \rightrightarrows f$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n dx = \int_a^b f dx.$

[証] $\displaystyle\left| \int_a^b f_n dx - \int_a^b f dx \right| \leq \int_a^b |f_n - f| dx \leq (b-a) \cdot \sup_I |f_n - f| \to 0.$ ■

前の例 13 は各点収束だけでは積分が収束することは保証できないことも表している.

系 8 (微分・極限交換可能定理)
I で $f_n \in C^1$, $f_n \to f$ かつ $\{f_n'\}$ 一様収束ならば $f \in C^1$, $f_n' \rightrightarrows f'$. 少し変えて
I で $f_n \in C^1$, ${}^\exists x_0 \in I; f_n(x_0)$ 収束, かつ $\{f_n'\}$ 一様収束ならば ${}^\exists f \in C^1$, $f_n \to f$, $f_n' \rightrightarrows f'$.

[証] $f(x) = \lim f_n(x) = \lim \left(f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f_n'(t)dt \right) = f(x_0) + \int_{x_0}^x \lim f_n'(t)dt$. これから $f \in C^1$ は明らかで, 両辺を微分して $f'(x) = \lim f_n'(x)$, i.e., $f_n' \rightrightarrows f'$.

後半は $f_n(x_0) \to \alpha$ として, $f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f_n'(t)dt \to \alpha + \int_{x_0}^x \lim f_n'(t)dt$ より, 右辺を $f(x)$ とおけば $f(x_0) = \alpha$, $f'(x) = \lim f_n'(x)$ より OK. ■

関数項級数 $\sum_n f_n(x) = \sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ (部分和 $F_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ とおく.)
区間 I で定義された関数列 $f_n(x)$ に対し,

- $\sum_n f_n(x)$ **各点収束** on I $\overset{\text{def}}{\iff}$ 部分和 $F_n(x)$ が各点収束.
- $\sum_n f_n(x)$ **一様収束** on I $\overset{\text{def}}{\iff}$ 部分和 F_n が一様収束.

$n = 0, 1, 2, \ldots$ に対し, $f_n(x) = x^n$ on (∞, ∞) を考えると, $\sum_{n=0}^\infty x^n = \dfrac{1}{1-x}$ on $(-1, 1)$ で, $0 < {}^\forall a < 1$ に対し, $[-a, a]$ 上では一様収束, i.e., $(-1, 1)$ 上で広義一様収束.

定理 53 (Weierstrass の優級数判定法)
区間 I での関数列 $\{f_n\}$ に対して, ${}^\exists\{M_n\}; |f_n(x)| \le M_n, \sum_n M_n < \infty$ なら $\sum_n f_n$ は一様収束.

[証] まず $\left| \sum_n f_n(x) \right| \le \sum_n |f_n(x)| \le \sum M_n < \infty$ より, ${}^\exists \sum_n f_n(x)$ (=: $F(x)$ とおく). そこで部分和 $F_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ を考えると, $|F(x) - F_n(x)| \le \sum_{k \ge n+1} |f_k(x)| \le \sum_{k \ge n+1} M_n$, i.e., $\sup_I |F - F_n| \le \sum_{k \ge n+1} M_n \to 0$. ■

定理 54 (項別積分可能定理) 有界閉区間 $I = [a, b]$ 上の連続関数列 $\{f_n\}$ に対し, $\sum_n f_n$ が一様収束するなら $\sum_n \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \sum_n f_n(x)dx$.

[証] 部分和 F_n に対し, 積分・極限交換可能定理を適用すれば明らか. ■

定理 55 (項別微分可能定理) 区間 I 上の C^1 級関数列 $\{f_n\}$ に対し, $\sum_n f_n$ が各点収束し (${}^\exists x_0 \in I; \sum f_n(x_0)$ 収束で十分), $\sum_n f_n'$ が一様収束するなら $\sum_n f_n$ も C^1 級で, $\left(\sum_n f_n(x) \right)' = \sum_n f_n'(x)$.

[証] 部分和 F_n に対し, 微分・極限交換可能定理を適用すれば明らか. ■

4.3 整級数 (Power Series)

整級数 $\sum_n a_n(x - x_0)^n$: x_0 **を中心とする整級数 (べき級数)**
$x_0 = 0$ として $\sum_n a_n x^n$ について調べる.

定理 56　整級数 $\sum_n a_n x^n$ が

(1) ある $x = \alpha \neq 0$ で収束していれば, ${}^{\forall}x; |x| < |\alpha|$ に対し, $\sum_n a_n x^n$ は絶対収束
(正確には広義一様収束).

(2) ある $x = \beta$ で発散していれば, ${}^{\forall}x; |x| > |\beta|$ に対し, $\sum_n a_n x^n$ は発散.

[証]　(1) $a_n x^n = a_n \alpha^n \cdot (x/\alpha)^n$ より $r = |x/\alpha| < 1$ とおけば, $|a_n x^n| \leq |a_n \alpha^n| \cdot r^n$ で, 今, $\sum_n a_n \alpha^n$ 収束より, $a_n \alpha^n \to 0$ で $\{a_n \alpha^n\}$ は有界, i.e., ${}^{\exists}M; |a_n \alpha^n| \leq M$. よって $\sum_n |a_n x^n| \leq M \sum_n r^n < \infty$. この証明から分かるように $0 < \rho_0 < |\alpha|$ を任意に固定し, $r_0 = \rho_0/|\alpha| < 1$ とおけば, $|{}^{\forall}x| \leq \rho_0$ に対し, $|a_n x^n| \leq M r_0^n$ より, そこで一様収束する.

(2) もしある $x_0; |x_0| > |\beta|$ で $\sum_n a_n x_0^n$ が収束しているとすると, 上のことから, $\sum_n a_n \beta^n$ は絶対収束してしまい仮定に反する. ■

整級数 $\sum_n a_n x^n$ の**収束半径** r とは [$|x| < r$ では絶対収束 (広義一様収束). $|x| > r$ では発散] をみたすものをいう. このとき 上の定理より, $r := \sup\left\{|x|; \sum_n a_n x^n \text{ は絶対収束}\right\}$ $(\leq \infty)$ で与えられる.

ちなみに $\sup S$ は以前, 集合 S が上に有界のときに定義したが, 上に非有界のときは ∞ として定義する. inf についても同様.

定理 57　整級数 $\sum_n a_n x^n$ の収束半径は $r = 1/\rho$ で与えられる; 但し, $\rho = \lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n|$ or $= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ if exists, ($0 \leq \rho \leq \infty$ で, $1/0 = \infty$, $1/\infty = 0$ と定義する.)

[証]　$\rho = \lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n|$ とする.

$|a_{n+1}x^{n+1}|/|a_n x^n| \to \rho|x|$ より, 正項級数の判定法を用いると,

(a) $0 < \rho < \infty$ のとき. $|x| < r = 1/\rho$ なら, $\rho|x| < 1$ で, 収束し, $|x| > r = 1/\rho$ なら, $\rho|x| > 1$ で, 発散する.

(b) $\rho = 0$ なら ${}^{\forall}x$ に対し, $|a_{n+1}x^{n+1}|/|a_n x^n| \to 0 < 1$ で, 収束.

(c) $\rho = \infty$ なら ${}^{\forall}x$ に対し, $|a_{n+1}x^{n+1}|/|a_n x^n| \to \infty > 1$ で, 発散.

$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ のときも同様 ($\sqrt[n]{|a_n x^n|} \to \rho|x|$ だから). ■

前節の定理により, 整級数は, 収束半径内 ($|x| < r$) では, (広義一様収束, 即ち, $0 < {}^{\forall}r_0 < r$ に対し, $|x| \leq r_0$ で一様収束だから) 項別微分も項別積分も可能で, 実際, 次の結果が成り立つ.

定理 58 (整級数の項別微分定理)　整級数 $f(x) = \sum_n a_n x^n$ の収束半径を $r > 0$ とする.

(1) 項別微分した整級数 $\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$ の収束半径も r で, $|{}^{\forall}x| < r$ に対し, $f'(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$.

(2) $f(x)$ は $(-r, r)$ で何回でも微分可能で, ${}^{\forall}k \geq 1$ に対し, $f^{(k)}(x) = \sum_{n\geq k} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k}$. 特に $a_n = f^{(n)}(0)/n!$.

[証]　(1) の収束半径が一致することさえ示せば十分. $\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$ の収束半径を r' とする. $|a_n x^n| \leq |n a_n x^n|$ から $r' \leq r$ は明らか. 逆を示すには, $|{}^{\forall}x| < r$ に対し, $\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$ が収束することをいえば良い. $|x| < r_0 < r$ をとると $\sum_n a_n r_0^n$ は収束, よって ${}^{\exists}M; |a_n r_0^n| \leq M$ で, $|a_n x^n| = |a_n r_0^n||x/r_0|^n \leq M|x/r_0|^n$. これから $\sum_{n\geq 1} |n a_n x^n| \leq M \sum_{n\geq 1} n|x/r_0|^n < \infty$. 従って, $\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1} = x^{-1} \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$ も収束. ■

定理 59 (整級数の項別積分定理) 整級数 $f(x) = \sum_n a_n x^n$ の収束半径を $r > 0$ とすると,

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \quad (|x| < r).$$

[証] 右辺の収束半径は微分しても変わらないことから r と一致して, $|x| < r$ で広義一様収束することから項別積分可能なことも明らか. ■

アーベルの定理 整級数 $\sum a_n x^n$ の収束半径が $0 < R < \infty$ のとき, もし, $x = R$ でも収束すれば, 収束は $[0, R]$ で一様で, 従って, $(-R, R]$ で連続となる. $x = -R$ で収束するときも同様.

[証] x へ Rx を代入することにより, $R = 1$ で示せば十分. $\sum a_n$ 収束より, 部分和がコーシー列となることから, $0 \leq x \leq 1$ に対し, 整級数の部分和も一様なコーシー列となることが示せて, 一様収束する. 実際, ${}^\forall \epsilon > 0, {}^\exists N; {}^\forall n \geq m \geq N, |a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n| < \epsilon$. ${}^\forall m \geq N$ を 1 つ固定し, $\sigma_n := a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$ $(n \geq m)$ とおけば, $|\sigma_n| < \epsilon$, また, $a_m = \sigma_m, a_{n+1} = \sigma_{n+1} - \sigma_n$ $(n > m)$ なので, $x^k - x^{k+1} \geq 0$ から,

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=m}^{n} a_k x^k \right| &= \left| \sigma_m x^m + (\sigma_{m+1} - \sigma_m) x^{m+1} + \cdots + (\sigma_{n+1} - \sigma_n) x^n \right| \\
&= |\sigma_m (x^m - x^{m+1}) + \sigma_{m+1}(x^{m+1} - x^{m+2}) + \cdots + \sigma_n (x^{n-1} - x^n) + \sigma_{n+1} x^n| \\
&\leq |\sigma_m|(x^m - x^{m+1}) + |\sigma_{m+1}|(x^{m+1} - x^{m+2}) + \cdots + |\sigma_n|(x^{n-1} - x^n) + |\sigma_{n+1}| x^n \\
&< \epsilon \left\{ (x^m - x^{m+1}) + (x^{m+1} - x^{m+2}) + \cdots + (x^{n-1} - x^n) + x^n \right\} = \epsilon x^m \leq \epsilon.
\end{aligned}$$
■

最後にテイラー展開 (マクローリン展開) について, テイラーの定理を用いて, それらの収束半径が分かることを簡単に説明して, そこでは項別微分も項別積分も出来ることを注意する.

テイラーの定理において剰余項

$$R_n(x) := \frac{f^{(n)}(a + \theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$$

が $n \to \infty$ のとき $R_n(x) \to 0$ となるとき

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

を**テイラー展開**といい, 特に $a = 0$ のとき**マクローリン展開**ともいうことは以前, 述べた. 実際, 次の例でその収束半径も分かる.

テイラー (マクローリン) 展開の例

$-\infty < x < \infty$ に対し,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad (\text{剰余項 } \frac{e^{\theta x}}{n!} x^n).$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \quad (\text{剰余項 } \frac{\sin(\theta x + n\pi/2)}{n!} x^n).$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \quad (\text{剰余項 } \frac{\cos(\theta x + n\pi/2)}{n!} x^n).$$

$-1 < x \leq 1$ に対し,

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots \quad (\text{剰余項 } \frac{(-1)^{n-1}(1+\theta x)^{-n}}{n} x^n).$$

一般二項展開 $a \in \mathbf{R}$ を固定し, $|x| < 1$ に対し, に対し
$\binom{a}{n} = \dfrac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}$ (**一般二項係数**) として

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \cdots \quad (\text{剰余項 } \binom{a}{n}(1+\theta x)^{a-n}x^n).$$

[証]

e^x は

$$|R_n| \le \frac{e^{\theta|x|}}{n!}|x|^n \le \frac{e^{|x|}}{n!}|x|^n \to 0 \quad (n \to \infty)$$

なぜなら $a_n(x) = e^{|x|}|x|^n/(n!)$ とすると $a_{n+1}(x)/a_n(x) = |x|/(n+1) \to 0$ となるから. また収束半径は ∞. $\sin x, \cos x$ も同様.

$\log(1+x)$ は $|x| < 1$ なら $1/(1+x) = \sum_{n\ge 0}(-1)^n x^n$ より, 0 から x まで項別積分できるから, $|x| < 1$ では成り立つ. さらに $x = 1$ のときにも成り立つことが言える. 実際, ライプニッツの交代級数定理から級数の収束が言えて, アーベルの定理からその値が $\log 2$ あることが分る. 直接証明としては, 等式

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{1+x}$$

において 0 から 1 まで積分して

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdots + (-1)^{n-1}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$$

で,

$$0 < \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx < \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \to 0 \quad (n \to 0)$$

より

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdots$$

を得る. 他にも, ($1/k$ の $k = 1, 2, \ldots, 2n$ の和から, 偶数番目の和の 2 倍を引くことにより)

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+k/n} \to \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \log 2$$

で, $2n+1$ までの和も同じ値に収束するので, 元の無限和も $\log 2$ となる.

$(1+x)^a$ は $a_n = \binom{a}{n}$ とおくと

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{a-n}{n+1}\right| \to 1 \quad (n \to \infty)$$

より収束半径は 1.

$$f(x) = \sum_{n\ge 0}\binom{a}{n}x^n \quad \text{とおくと項別微分できて} \quad f'(x) = \sum_{n\ge 1} n\binom{a}{n}x^{n-1}.$$

$$(1+x)f'(x) = a + \sum_{n\ge 1}\left\{(n+1)\binom{a}{n+1} + n\binom{a}{n}\right\}x^n = af(x).$$

即ち

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{a}{1+x}$$

両辺を 0 から x $(|x|<1)$ まで積分して,

$$\log|f(x)| = a\log(1+x), \quad \text{i.e.,} \quad f(x) = \pm(1+x)^a$$

$f(0)=1$ より, 結局, $f(x)=(1+x)^a$. ■

最後に, 色々と有効な応用例をいくつか挙げよう.

一般二項展開において, $\alpha=-1/2, x=-t^2$ $(|t|<1)$ として,

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = 1+\sum_{n\geq 1}\frac{-1/2(-1/2-1)\cdots(-1/2-n+1)}{n!}(-t^2)^n = 1+\sum_{n\geq 1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{2n}.$$

$(-1/2)(-1/2-1)\cdots(-1/2-n+1) = (-1)^n 2^{-n} 3\cdot 5\cdots(2n-1) = (-1)^n 2^{-n}(2n-1)!!$ による.

両辺に $\int_0^x dt$ $(|x|<1)$ を施すと, 次のテイラー展開を得る:

$$\sin^{-1}x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = x+\sum_{n\geq 1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

また, $1/(1+x) = 1-x+x^2-\cdots$ $(|x|<1)$ において, $x=t^2$ $(|t|<1)$ を代入して, 上と同様に積分すれば,

$$\arctan x = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots \quad (|x|<1)$$

を得るが, これは, $x=\pm 1$ でも成り立つ by ライプニッツとアーベルの定理.

$x=1$ として,

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2n+1} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots$$

を得るので, この式を使って, π の小数表示を求めることができる.