常微分方程式

変数 x の未知関数 $y=y(x)$ の n 階 (常) 微分方程式 $F(x,y,y',\dots,y^{(n)})=0$. n: 階数, y を解という.

$y''=cy$ は 2 階微分方程式で, 解は $y=Ae^{cx}+Be^{-cx}$ (A,B は任意定数).

$y'=y$ は 1 階微分方程式で, 解は $y=\log x+C$ (C は任意定数).

・**一般解**: n 個の任意定数を含む解,

・**特殊解**: 任意定数の一部または全てに値を入れた解.

・**特異解**: 上記以外の解.

n 階微分方程式の内, $y^{(n)}=f(x,y,y',\dots,y^{(n-1)})$: のものを**正規形**という.

定理　$f(x,y,p_1,\dots,p_{n-1})$: 点 $(a,b_0,b_1,\dots,b_{n-1})$ の近傍で C^1 なら, 正規形の微分方程式: $y^{(n)}=f(x,y,y',\dots,y^{(n-1)})$ は, 条件 $(x,y,y',\dots,y^{(n-1)})=(a,b_0,b_1,\dots,b_{n-1})$ を満たす解 $y=y(x)$ が $x=a$ の近傍で唯一つ存在する.

(I) 変数分離形 $y'=f(x)g(y)$

$$\frac{y'}{g(y)}=f(x)\to\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx$$

(II) 同次系 $y'=f(y/x)$

$u=y/x$, i.e., $u(x)=y(x)/x$ とおけば変数分離形となる. 実際, $u'=y'/x-y/x^2=(f(u)-u)/x$ でこれは変数分離形.

$$\int\frac{du}{f(u)-u}=\log|x|+C.$$

(III) 1 階線形微分方程式 $y'+P(x)y=Q(x)$.

解は,

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)$$

まず, 同次方程式 $y'+P(x)y=0$ 変数分離形で解は, $y=Ce^{-\int P(x)dx}$. 次に C を $C(x)$ と変えて (**定数変化法**という), $y'=C'(x)e^{-\int P(x)dx}-P(x)y$. 元の微分方程式へ代入すれば, $C'(x)e^{-\int P(x)dx}=Q(x)$, i.e., $C'(x)=Q(x)e^{\int P(x)dx}$. よって, $C(x)=\displaystyle\int\left(Q(x)e^{\int P(x)dx}\right)dx+C$. ■

ベルヌーイ: $y'+P(x)y=Q(x)y^m$ $(m\geq 2)$. $u=y^{1-m}$ とおけば, 1 階線形微分方程式. 実際, $u'=(1-m)y^{-m}y'$ より, $u'+P(x)u=Q(x)$ となる.

一般に, $y^{(n)}+p_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_1(x)y'+p_0(x)y=q(x)$: **線形微分方程式**において, $q(x)=0$ の時, **斉次形**, $q(x)\neq 0$ の時, **非斉次形**, 係数 $p_j(x)$ が全て定数のとき **定数係数の線形微分方程式**という.

$P(x,y)+Q(x,y)y'=0$ を, 形式的に, $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ と表し, どちらが変数でどちらが関数かを区別しない扱いをすることが多い.

完全微分形: ${}^{\exists}F(x,y)\in C^1; F_x=P, F_y=Q$, i.e., $F_x(x,y)dx+F_y(x,y)dy=0$.

このとき, もし解 $y=y(x)$ があれば, $F(x,y(x))=c$ (定数) となる. 実際, まずこのとき, $0=dF(x,y(x))/dx=F_x(x,y(x))+F_y(x,y(x))y'(x)=P(x,y(x))+Q(x,y(x))y'(x)$. 逆に, 完全微分形なら, 上の計算から, $dF(x,y(x))/dx=0$ となるので, $F(x,y(x))=c$.

また, $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ 完全微分形 $\iff P_y=Q_x$. 実際, $F_x=P, F_y=Q$ なら, $P_y=F_{xy}$ で, $Q_x=F_{yx}=F_{xy}=P_y$. 逆は, 適当な a,b に対し,

$$F(x,y):=\int_a^x P(s,b)ds+\int_b^y Q(x,t)dt$$

とおけば,

$$F_x(x,y)=P(x,b)+\int_b^y Q_x(x,t)dt=P(x,b)+\int_b^y P_y(x,t)dt=P(x,y)$$

更に, $F_y(x,y)=Q(x,y)$ で, 完全微分形となる.

積分因子: $M(x,y)$; $M(x,y)P(x,y)dx+M(x,y)Q(x,y)dy=0$ が完全微分形, i.e., $^\exists F\in C^1; F_x=MP, F_y=MQ$.

この M を求めるのは簡単ではないが, 次は分っている:

(i) $\dfrac{P_y-Q_x}{P}$ が x のみの関数 $\Longrightarrow M(x)=\exp\left[\displaystyle\int\frac{P_y-Q_x}{P}dx\right]$

(ii) $\dfrac{Q_x-P_y}{Q}$ が y のみの関数 $\Longrightarrow M(y)=\exp\left[\displaystyle\int\frac{Q_x-P_y}{Q}dy\right]$

(iii) P,Q が多項式のときは, $M=x^ny^m$ とおいて比較することで, 求まる場合もある.

定数係数の線形微分方程式

次の n 階定数係数の微分方程式を考える.

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=q(x)$$

微分演算子 $D=d/dx$ を用いて, $F_n(D)=D^n+a_{n-1}D^{n-1}+\cdots+a_1D+a_o$ とおくと, 上の方程式は, $F_n(D)y=q(x)$ と書ける.

定理 1 次の非斉次の解の一つ (特殊解) を $y_0(x)$ とし,

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=q(x).$$

次の斉次の一般解を $u(x)$ とすると, 上の一般解は $y=y_0+u$ で与えられる.

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=0.$$

また, 上の斉次の n 次線形微分方程式は, n 個の基本解 $u_j(x)$ を持ち, 一般解 $u(x)$ は $u(x)=c_1u_1(x)+\cdots+c_nu_n(x)$ で与えられる. ここで, 基本解とは, $u_j(x)$ が斉次の解で, 1 次独立である. さらに, $\{u_j(x)\}$ が 1 次独立とは, $c_1u_1(x)+\cdots+c_nu_n(x)=0$ なら, $c_1=\cdots=c_n=0$ を満たすときを言う.

この結果は, 定数係数でない線形微分方程式でも成り立つ.

まず, $n=1$ のとき, 定数変化法で解いた時の解で, $P(x)=-\alpha, Q(x)=q(x)$ より,

$$(D-\alpha)y=q(x) \quad\Longleftrightarrow\quad y=e^{\alpha x}\left(\int e^{-\alpha x}q(x)dx+C\right)$$

特に, $q(x)=0$ なら, $y=Ce^{\alpha x}$.

ここで, 形式的に $y=(D-\alpha)^{-1}q(x)=\dfrac{1}{D-\alpha}q(x)$ と表すことにする. つまり, $(D-\alpha)^{-1}$ という作用素を, $(D-\alpha)^{-1}q(x)=y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (D-\alpha)y=q(x)$ によって定義する. 即ち,

$$(D-\alpha)^{-1}q(x)=\frac{1}{D-\alpha}q(x)=e^{\alpha x}\left(\int e^{-\alpha x}q(x)dx+C\right).$$

ちなみに $(D-\alpha)(D-\beta)=(D-\beta)(D-\alpha)$ の互換性より, $(D-\alpha)^{-1}(D-\beta)=(D-\beta)(D-\alpha)^{-1}$ も成り立つことに注意.

斉次の定数係数の線形微分方程式の解

定理 2 $F_1(x),\ldots,F_k(x)$ を互いに素な多項式とする. $u(x)$ が微分方程式 $F_1(D)\cdots F_k(D)u(x)=0$ の解 $\Longleftrightarrow$ $u(x)=c_1u_1(x)+\cdots+c_ku_k(x)$; $u_j(x)$ は $F_j(D)u(x)=0$ の解.

但し, **多項式が互いに素** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 共通因子を持たない.

定理 3 (1) $(D-\alpha)^m u(x)=0$ の一般解は, $u(x)=c_0e^{\alpha x}+c_1xe^{\alpha x}+c_{m-1}x^{m-1}e^{\alpha x}$.

(2) $t^2+bt+c=0$ は虚数解を持つとして, その解を $\alpha\pm i\beta$ とする. $(D^2+bD+c)^m u(x)=0$ の一般解は $u(x)=a_0e^{\alpha x}\cos\beta x+a_1xe^{\alpha x}\cos\beta x+a_{m-1}x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x=b_0e^{\alpha x}\sin\beta x+b_1xe^{\alpha x}\sin\beta x+b_{m-1}x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$.

2 階の場合を考える.

$y=Ce^{\alpha x}$ とすると, $y''+a_1y'+a_0y=(\alpha^2+a_1\alpha+a_0)y$ に注意する.

[S0] まず, 斉次のとき, i.e., $q(x)=0$ のときから考える.

$F_2(t)=t^2+a_1t+a_0=(t-\alpha)(t-\beta)$ とする.

$$(D^2+a_1D+a_0)y=(D-\alpha)(D-\beta)y=0.$$

$F_2(t)=0$ を**特性方程式** と言い, その解 α,β について場合分けで考える.

(i) 異なる 2 実解, i.e., $\alpha<\beta$ のとき. $e^{\alpha x},e^{\beta x}$ が解なので, $y=C_1e^{\alpha x}+C_2e^{\beta x}$.

(ii) 2 重解 $(\alpha=\beta)$ のとき. $e^{\alpha x},xe^{\alpha x}$ が解となるので (階数低下法), $y=C_1e^{\alpha x}+C_2xe^{\alpha x}$.

$$(xe^{\alpha x})'=(1+\alpha x)e^{\alpha x},(xe^{\alpha x})''=\alpha(2+\alpha x)e^{\alpha x}\to y''-2\alpha y'+\alpha^2y=0.$$

階数低下法 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ において, 解が 1 つ $y=u(x)$ が分っているとき, $y=u(x)v(x)$ とおいて代入すると, v の 1 解微分方程式となり, 解ける. $y'=u'v+uv',y''=u''v+2u'v'+v''$ より, $0=(u''v+2u'v'+v'')+p(u'v+uv')+quv=(2u'+pu)v'+v''$ による.

上の (ii) の場合, $u=e^{\alpha x}$ が解は既に分っているので, $p=-2\alpha$ より, $(2\alpha u-2\alpha u)v'+v''=0,v''=0$ となり, $v=Cx$ を得て, $y=uv=xe^{\alpha x}$ も解となる.

(iii) 複素数解 $\alpha,\beta=a\pm ib$ $(a,b\in\mathbf{R})$ のとき. $e^{\alpha x}=e^{ax+ibx}=e^{ax}(\cos bx+i\sin bx)$ で, 実部, 虚部共に, 斉次方程式の解となり, $e^{ax}\cos bx,e^{ax}\sin bx$ が解なので, $y=e^{ax}(C_1e^{ax}\cos bx+C_2e^{ax}\sin bx)$.

[S1] 次に, $q(x)\neq 0$ のときを考える. 特殊解を 1 つ見付ければ, 一般解は, 上の斉次の時の解との線形結合となるので, 特殊解を求めれば良い. またこの時, 積分定数は 0 として求めれば良い.

(i) $\alpha\neq\beta$ のとき,

$$\frac{1}{(D-\alpha)(D-\beta)}=\frac{1}{\beta-\alpha}\left(\frac{1}{D-\alpha}-\frac{1}{D-\beta}\right)$$

を用いて, 複素数解も含めて, 次が特殊解:

$$y=\frac{1}{D-\alpha}\frac{1}{D-\beta}q(x)=\frac{1}{\beta-\alpha}\left(e^{\alpha x}\int e^{-\alpha x}q(x)dx-e^{\beta x}\int e^{-\beta x}q(x)dx\right).$$

但し, もし α,β が複素数なら, $q(x)$ が実数値なので, 実部が特殊解となる (虚部は一般解の一部となる).

例

$$\frac{1}{D^2+a^2}q(x)=\frac{1}{a}\left(\sin ax\int q(x)\cos ax dx-\cos ax\int q(x)\sin ax dx\right).$$

上で $\alpha,\beta=\pm ia$ として, $\beta-\alpha=-2ia\to 1/(\beta-\alpha)=i/(2a)$ に注意して, $\{\cdots\}$ 内の虚部を見れば良い. ただ, 複素数解として次のままで表しても, 実部を計算すれば上が得られるので, 本質的には同じことである.

$$y=\frac{1}{D-ia}\frac{1}{D+ia}q(x)=\frac{i}{2a}\left(e^{iax}\int e^{-iax}q(x)dx-e^{-iax}\int e^{iax}q(x)dx\right).$$

(ii) 2 重解 $(\alpha=\beta)$ のとき.

$$y=\frac{1}{D-\alpha}e^{\alpha x}\int e^{-\alpha x}q(x)dx=e^{\alpha x}\int\left(\int e^{-\alpha x}q(x)dx\right)dx.$$

一般に, 多項式 $F(x)$ に対し, $F(X)y=q(x)$ の解を $y=\frac{1}{F(D)}q(x)$ と表すことにする. 上と次の結果から, 解 y は基本的に積分によって求められる. $\dfrac{1}{F(D)}q(x)=\dfrac{1}{F(D+a)}(e^{-ax}q(x))$.

しかし, $q(x)$ が特別な場合は, 簡単に求められる.

・$q(x) = e^{ax}$ で, $F(a) \neq 0$ のとき, $\dfrac{1}{F(D)}e^{ax} = \dfrac{1}{F(a)}e^{ax}$. ($D^m e^{ax} = a^m e^{ax}$ より明らか.)

・$q(x)$ が n 次多項式のとき, $\dfrac{1}{1-aD}q(x) = \{1 + aD + (aD)^2 + \cdots + (aD)^n\}q(x)$.

($D^{n+1}q(x) = 0$ より, 式を満たすことは容易.

別の考え方として, $1/(1-aD) = \sum_{n\geq 0}(aD)^n$ より明らかという見方もある.)

ちなみに, 複素関数 e^z $(z = x + iy)$ の定義は $e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$ なのだが, そもそも $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ (オイラーの公式) が成り立つのは, e^x (と $\cos x, \sin x$) のマクローリン展開（$x = 0$ でのテイラー展開)

$$e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

において, $x = i\theta$ を代入し, 和を偶数番目 (実部), 奇数番目 (虚部) で分けることによって分る. 実際,

$$e^{i\theta} = \sum_{n\geq 0} \frac{(i\theta)^n}{n!} = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k \theta^{2k}}{(2k)!} + i\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k \theta^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

微分方程式　演習問題

次の微分方程式を解け.

1. 変数分離形 (1) $y' = x^2 y$ (2) $x(x+1)y' = y$ [7.1-2 (1)(3)] [7.1-2 (5)(6)]
   その応用 (3) $y' = x + 2y - 1$ ($= z \to z' = 1 + 2z$) (4) $y' = e^{x+y} - 1$ ($z = x + y \to z' = e^z$)
2. 同次形 (1) $-yy' = x + 2y$ (2) $(x+y)y' = x - y$ [7.1-3 (1)(3)]
3. 1 階線形, ベルヌーイ (1) $y' - y = e^{2x}$ (2) $y' - y = xy^2$ [7.1-4 (1)(5)]
4. 完全微分形であることを確かめ, 解け. $(-x + y + 2) + (x - y + 1)y' = 0$ [7.1-5 (1)]
5. 積分因子 $M(x, y)$ を求め, 解け. $(x + 2y)dx + dy = 0$ [7.1-6 (1)]
   $\to M_y(x + 2y) + 2M = 0$ もし $M = M(x)$ なら? また, $\int M(x)dy = M(x)y + C(x)$ に注意.
6. 次の一般解を求めよ. (1) $(D-2)(D+3)y = 0$ (2) $(D-2)^2(D+1)y = 0$ [7.2-1 (1)(2)]
   (2) は $(t-2)^2$ と $t-1$ が互いに素なので, $(D-2)^2 y = 0, (D+1)y = 0$ の解の線形和.
7. 次の特殊解 (解の 1 つ) を求めよ. (1) $\dfrac{1}{D^2 - D} e^{2x}$ (2) $\dfrac{1}{(D-1)(D-2)} xe^x$ [7.2-2 (1)(2)]

・変数分離形 $y' = f(x)g(y) \to \displaystyle\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$.

・同次系 $y' = f(y/x) \to \displaystyle\int \frac{du}{f(u) - u} = \log|x| + C$. ($u = y/x$, i.e., $u(x) = y(x)/x$ とおけば変数分離形).

・1 階線形微分方程式 $y' + P(x)y = Q(x) \to y = e^{-\int P(x)dx}\left(\displaystyle\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right)$

特に, $P(x) = -\alpha, Q(x) = q(x)$ のとき, **微分演算子** $D = d/dx$ を用いて,

$$(D - \alpha)y = q(x) \quad \Longleftrightarrow \quad y = \frac{1}{D - \alpha}q(x) = e^{\alpha x}\left(\int e^{-\alpha x}q(x)dx + C\right).$$

・**ベルヌーイ**: $y' + P(x)y = Q(x)y^m$ $(m \geq 2)$. $u = y^{1-m}$ とおけば, 1 階線形微分方程式. 実際, $u' = (1-m)y^{-m}y'$ より, $u' + P(x)u = Q(x)$ となる.

・**完全微分形**: $^\exists F(x, y) \in C^1; F_x = P, F_y = Q$, i.e., $F_x(x, y)dx + F_y(x, y)dy = 0$.
$\to$ もし解 $y = y(x)$ があれば, $F(x, y(x)) = c$ (定数)
$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ 完全微分形 $\Longleftrightarrow$ $P_y = Q_x$ (if $F \in C^2$).
これは $F(x, y) = c \Longleftrightarrow 0 = dF(x, y) = F_x dx + F_y dy$ と覚える. (つまり $F_x = P, F_y = Q$.)

・積分因子: $M(x, y)$; $M(x, y)P(x, y)dx + M(x, y)Q(x, y)dy = 0$ が完全微分形, i.e., $^\exists F \in C^1; F_x = MP, F_y = MQ$
$\Longleftrightarrow$ $(MP)_y = (MQ)_x = F_{xy}$ if $F \in C^2$.

・定数係数の 2 階線形微分方定式 $y'' + a_1 y' + a_0 = q(x)$
斉次 $q(x) = 0$ のとき特性方程式 $t^2 + a_1 t + a_0 = (t - \alpha)(t - \beta) = 0$
(i) 異なる 2 実解, i.e., $\alpha < \beta$ のとき. $y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$.
(ii) 2 重解 $(\alpha = \beta)$ のとき. $y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 x e^{\alpha x}$.
(iii) 複素数解 $\alpha, \beta = a \pm ib$ $(a, b \in \mathbf{R})$ のとき. $y = e^{ax}(C_1 e^{ax}\cos bx + C_2 e^{ax}\sin bx)$.
非斉次 $q(x) \neq 0$ のとき. 特殊解を 1 つ見付ければ, 一般解は, 上の斉次の時の解との線形結合となる.
(i) $\alpha \neq \beta$ のとき, 複素数解も含めて, 次が特殊解:
$y = \dfrac{1}{D - \alpha}\dfrac{1}{D - \beta}q(x) = \dfrac{1}{\beta - \alpha}\left(e^{\alpha x}\displaystyle\int e^{-\alpha x}q(x)dx - e^{\beta x}\int e^{-\beta x}q(x)dx\right)$. 但し, もし α, β が複素数なら, $q(x)$ が実数値なので, 実部が特殊解となる (虚部は一般解の一部となる).
(ii) 2 重解 $(\alpha = \beta)$ のとき. $y = \dfrac{1}{D - \alpha}e^{\alpha x}\displaystyle\int e^{-\alpha x}q(x)dx = e^{\alpha x}\int\left(\int e^{-\alpha x}q(x)dx\right)dx$.

---

1. $Ce^{x^3/3}$, $Cx/(x+1)$, $Ce^x - x/2 + 1/4$, $-x - \log|C - x|$, .
2. $\log|x+1| + x/(x+y) = C$, $x^2 - 2xy - y^2 = C$. 3. $e^{2x} + Ce^x$, [0 or $1/(1 - x + Ce^{-x})$]
4. $-x^2/2 + 2x + xy + y - y^2/2 = C$. 5. $(2x + 4y - 1)e^{2x} = C$ $(M(x, y) = e^{2x})$.
6. $e^{2x}/3$, $-(x^2 + 2x + 2)e^x/2$,